سامانه بانک تستی

FlowRax

ریاضی

Math

@Flow_KonKour

@LoPRax_KonKour

کلیک کن و با ما همراه شو!

۱

$$f(x)=x+۲\sqrt{x-۱}=x-۱+۲\sqrt{x-۱}+۱$$

پس ابتدا، f را به صورت مقابل می‌نویسیم: $f(x)=(\sqrt{x-۱}+۱)^۲$

$$y=(\sqrt{x-۱}+۱)^۲ \Rightarrow \sqrt{y}=\sqrt{x-۱}+۱ \Rightarrow \sqrt{x-۱}=\sqrt{y}-۱ \Rightarrow x=(\sqrt{y}-۱)^۲+۱$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=(\sqrt{x}-۱)^۲+۱ \ , \ x\geq ۱ \Rightarrow f^{-۱}(x)=x-۲\sqrt{x}+۲ \ , \ x\geq ۱$$

پس، $a=-۲$ و $b=۲$، پس $a-b=-۴$.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲

عبارت زیر رادیکال درجه ۲ است و دامنهٔ آن $[۳,+\infty)$ است که امکان‌پذیر نمی‌باشد، مگر آن‌که $a-۲=۰$، یعنی عبارت درجه اول شود.

پس: $f(x)=\sqrt{۴x+b}$ و $a=۲$

$$D_f : ۴x+b\geq ۰ \Rightarrow x\geq \frac{-b}{۴} \Rightarrow \frac{-b}{۴}=۳ \Rightarrow b=-۱۲$$

به این ترتیب: $y=\sqrt{bx-۳+a}=\sqrt{-۱۲x-۱}$

$$D_y : -۱۲x-۱\geq ۰ \Rightarrow x\leq -\frac{۱}{۱۲}$$

$$D_y=(-\infty,-\frac{۱}{۱۲}]$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳

دامنه توابع $f(x)=x-\sqrt{۳-x}$ و $g(x)=x+\sqrt{۳-x}$ از حل نامعادله $۳-x\geq ۰$ به دست می‌آید. پس دامنه هر دو تابع $x\leq ۳$ است و چون دامنه تابع $f\times g$ از اشتراک دامنه دو تابع به دست می‌آید، پس دامنه این تابع نیز $x\leq ۳$ است و داریم:

$$(f.g)(x)=۵x+۲ \Rightarrow f(x).g(x)=۵x+۲ \Rightarrow \underbrace{(x-\sqrt{۳-x})(x+\sqrt{۳-x})}_{\text{مزدوج}}=۵x+۲ \Rightarrow x^۲-(۳-x)=۵x+۲$$

$$\Rightarrow x^۲-۳+x=۵x+۲ \Rightarrow x^۲-۴x-۵=۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \checkmark \\ x=۵ \times \end{cases}$$

توجه داشته باشید xهای کوچک‌تر یا مساوی عدد ۳ قابل قبول هستند پس معادله فقط یک جواب دارد.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴

چون تابع f یک تابع خطی است، پس ضابطهٔ آن به صورت $f(x)=ax+b$ است و بنابراین باید داشته باشیم:

$$a=\frac{(m+۴)-(m-۲)}{۵-۳}=\frac{۶}{۲}=۳$$

$$a=\frac{(۴m+۱)-(m+۴)}{-۱-۵}=\frac{۳m-۳}{-۶}=\frac{m-۱}{-۲} \Rightarrow \frac{m-۱}{-۲}=۳ \Rightarrow m-۱=-۶ \Rightarrow m=-۵$$

پس معادلهٔ تابع f، به صورت $f(x)=۳x+b$ است و بنابراین باید مختصات یکی از نقاط f در ضابطه صدق کند، مثلاً نقطهٔ $(۳,m-۲)=(۳,-۷)$، یعنی داریم:

$$f(۳)=-۷ \Rightarrow -۷=۳(۳)+b \Rightarrow b=-۱۶$$

معادلهٔ تابع f به صورت $f(x)=۳x-۱۶$ است. حال باید مختصات نقطهٔ $(t,۲t+۷)$ نیز در معادلهٔ تابع f صدق کند که در این صورت خواهیم داشت:

$$۲t+۷=۳t-۱۶ \Rightarrow t=۲۳$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵

ابتدا f را ساده کرده و ضرایب را چنان بدست می‌آوریم تا $f(x)=x$ یعنی تابع همانی بدست آید.

$$f(x)=ax^{۲}-۳x-۲abx+۶b+۲x^{۲}-۶$$

$$f(x)=(a+۲)x^{۲}-(۳+۲ab)x+۶b-۶$$

برای آن‌که f همانی باشد:

$$\begin{cases} a+۲=۰\rightarrow a=-۲ \\ ۳+۲ab=-۱ \\ ۶b-۶=۰\rightarrow b=۱ \end{cases} \Rightarrow f(x)=x$$

با توجه به مقادیر بدست آمده برای a و b تابع $y=(b-۱)x-۳a$ ثابت است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶

چون f یک تابع است پس مقادیر هر دو ضابطه به ازای $x=۲$ باید با هم برابر باشند، یعنی داریم:

$$۸a-۲=-۸+۱۲a\Rightarrow ۴a=۶\Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$$

$$f(x)=\begin{cases} ۶x-x^{۲}+۲ & x\le ۲ \\ -x^{۳}+۹x & x\ge ۲ \end{cases}$$

$$f(۲\sqrt{۲})=-(۲\sqrt{۲})^{۳}+۹(۲\sqrt{۲})=۲\sqrt{۲}$$

$$f(\sqrt{۲})=۶\sqrt{۲}-۲+۲=۶\sqrt{۲}$$

$$f(۲\sqrt{۲})+f(\sqrt{۲})=۸\sqrt{۲}\Rightarrow[۸\sqrt{۲}]=[۸(۱/۴)]=[۱۱/۲]=۱۱$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷

اگر a و b اضلاع قائم مثلث باشند، داریم: $a^{۲}+b^{۲}=۴$

مساحت مثلث را x و محیط آن را y می‌نامیم.

$$x=\frac{ab}{۲}\rightarrow ab=۲x$$

$$y=a+b+۲\rightarrow a+b=y-۲$$

خواهیم داشت:

$$a^{۲}+b^{۲}=۴\rightarrow (a+b)^{۲}-۲ab=۴\rightarrow (y-۲)^{۲}-۴x=۴$$

$$\rightarrow (y-۲)^{۲}=۴x+۴\rightarrow y-۲=\sqrt{۴x+۴}\rightarrow y=\sqrt{۴x+۴}+۲\rightarrow y=۲(\sqrt{x+۱}+۱)$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸

$$f(x)=-۲x^{۲}-۶x+۳m\Rightarrow R_f=(-\infty,-\frac{\Delta}{۴a}]\Rightarrow R_f=(-\infty,\frac{-۲۴m-۳۶}{-۸}]=(-\infty,\frac{۶m+۹}{۲}]$$

چون حداکثر پنج عدد طبیعی در محدودهٔ برد تابع موجود است، پس باید این پنج عدد طبیعی اعداد ۵,۴,۳,۲,۱ باشند، در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{۶m+۹}{۲}<۶\Rightarrow ۶m+۹<۱۲\Rightarrow ۶m<۳\Rightarrow m<\frac{۱}{۲}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹

به بررسی همه گزینه‌ها می‌پردازیم:

بررسی موارد:

گزینه ۱: دامنه هر دو تابع برابر با $\mathbb{R}$ است و ضابطه دو تابع نیز با هم برابر است:

$$f(x)=\frac{x^۲-۱}{|x|+۱}=\frac{|x|^۲-۱}{|x|+۱}=\frac{(|x|-۱)(|x|+۱)}{|x|+۱}=|x|-۱=g(x)\checkmark$$

گزینه ۲: دامنه هر دو تابع برابر است و ضابطه آن‌ها نیز با هم برابر است:

$$f(x)=\log x^۲=۲\log|x|=g(x)\checkmark$$

گزینه ۳: دامنه دو تابع برابر $\mathbb{R}$ است ولی ضابطه آن‌ها با هم برابر نیست:

$$f(x)=\sqrt{x^۲-۲x+۱}=\sqrt{(x-۱)^۲}=|x-۱|\neq g(x)\times$$

گزینه ۴: دامنه دو تابع $\mathbb{R}$ است و هر دو تابع، تابع ثابت $y=۰$ هستند. ببینید:

$$۰\le x^۲<x^۲+۱\Rightarrow ۰\le\frac{x^۲}{x^۲+۱}<۱\Rightarrow\left[\frac{x^۲}{x^۲+۱}\right]=۰\Rightarrow f(x)=۰$$

$$g(x)=[x-[x]]=[x]-[x]=۰$$

توجه داشته باشید زمانی نمودار دو تابع بر هم منطبق هستند که دو تابع با هم برابر باشند.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰

دامنهٔ تابع $y=\sqrt{-[x]^۲+[x]+۶}$ را به دست می‌آوریم:

$$-[x]^۲+[x]+۶\ge۰\rightarrow-([x]-۳)([x]+۲)\ge۰$$

$$\rightarrow-۲\le[x]\le۳\rightarrow-۲\le x<۴\rightarrow-۱/۵\le x+\frac{۱}{۲}<۴/۵$$

$$\rightarrow[x+\frac{۱}{۲}]\in\{-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴\}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱

ابتدا ضابطه تابع f را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم. ببینید:

$$f(x)=ax+|x+۱|=\begin{cases}ax+x+۱ & x\ge-۱\\ ax-x-۱ & x<-۱\end{cases}=\begin{cases}(a+۱)x+۱ & x\ge-۱\\ (a-۱)x-۱ & x<-۱\end{cases}$$

برای این که این تابع در $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک باشد باید شیب هر دو خط در هر دو ضابطه هم‌علامت باشند. پس می‌توان نوشت:

$$(a+۱)(a-۱)>۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}a<-۱\ \text{یا}\ a>۱$$

پس فقط سه مقدار $a=-۱$، $a=۰$ و $a=۱$ از مجموعه اعداد صحیح برای a قابل قبول نیست.

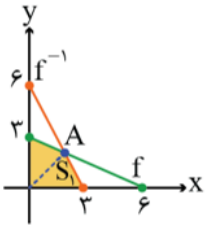
(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲

$$f(x)=-\frac{x}{۲}+۳$$

$$f^{-۱}(x)=-۲x+۶$$

$$f(x)=f^{-۱}(x)\Rightarrow -\frac{x}{۲}+۳=-۲x+۶\Rightarrow \frac{۳x}{۲}=۳\Rightarrow x=۲\Rightarrow y=۲\Rightarrow A(۲,۲)$$



قسمت رنگی شامل دو مثلث است: در مثلث با مساحت $S_۱$، قاعده ۳ و ارتفاع ۲ واحد است.

$$S_۱=\frac{۳\times ۲}{۲}=۳\xrightarrow{\text{مساحت رنگی}}۲\times ۳=۶$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳

$$D_f: x>۰$$
$$D_g=\{۰,۱۰,-۵,۱۰۰\}\Rightarrow D_{f-۲g}=\{۱۰,۱۰۰\}$$

حال تابع را تشکیل می‌دهیم:

$$x=۱۰\Rightarrow (f-۲g)(۱۰)=f(۱۰)-۲g(۱۰)=۱-۲(۲)=-۳$$
$$x=۱۰۰\Rightarrow (f-۲g)(۱۰۰)=f(۱۰۰)-۲g(۱۰۰)=۲-۲(-۱)=۴$$

پس برد تابع $f-۲g$ به شکل $\{-۳,۴\}$ است که مجموع اعضای آن ۱ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

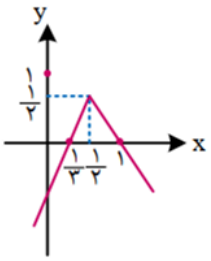
۱۴

ابتدا دو تابع را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$۲-f(x+۱)=۲\Rightarrow f(x+۱)=۰$$

حال کافی است مساحت محدود به نمودار $y=f(x)$ و $y=۰$ را محاسبه کنیم. (انتقال افقی و قرینه شدن نسبت به محور افقی تأثیری در محاسبه مساحت ندارد)

$$f(x)=\begin{cases}۳x-۱ & x<\frac{۱}{۲}\\ -x+۱ & x\geq\frac{۱}{۲}\end{cases}$$



$$S=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times(۱-\frac{۱}{۳})=\frac{۱}{۶}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵ به عنوان یک نکته مهم بلد باشید دو تابع نمایی $y=a^x$ و $y=b^x$ زمانی نسبت به محورyها قرینه هستند که a و b معکوس همدیگر باشند، یعنی حاصلضرب آن‌ها ۱ باشد. پس برای دو تابع $f(x)=a^x$ و $g(x)=(\frac{۱}{۱-۲a})^x$ می‌توان نوشت:

$$a(\frac{۱}{۱-۲a})=۱\Rightarrow\frac{a}{۱-۲a}=۱\Rightarrow ۱-۲a=a\Rightarrow ۳a=۱\Rightarrow a=\frac{۱}{۳}$$

پس $f(x)=(\frac{۱}{۳})^x$ و $g(x)=۳^x$ هستند و برای به دست آوردن نقطه تلاقی تابع $g(x)$ و $f(x)-\frac{۸}{۳}$ باید معادله $g(x)=f(x)-\frac{۸}{۳}$ را حل کنیم. داریم:

$$۳^x=(\frac{۱}{۳})^x-\frac{۸}{۳}\xrightarrow{۳^x=t}t=\frac{۱}{t}-\frac{۸}{۳}\xrightarrow{\times ۳t}۳t^۲=۳-۸t$$

$$\Rightarrow ۳t^۲+۸t-۳=۰\Rightarrow(t+۳)(۳t-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}t=-۳:۳^x=-۳ &\times\\ t=\frac{۱}{۳}:۳^x=\frac{۱}{۳}\to x=-۱ &\checkmark\end{cases}$$

در نتیجه نقطه برخورد دو تابع $A(-۱,\frac{۱}{۳})$ است، که فاصله آن از نقطه $(-۱,۱)$ با توجه به هم طول بودن دو نقطه برابر با $\frac{۲}{۳}$ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶ اول دامنهٔ مشترک توابع f و g را حساب می‌کنیم:

$$D_{f-۲g}=D_f\cap D_g=\{۱,۲,-۲\}$$

مقدار تابع $f-۲g$ را به ازای $x=۱$، $x=۲$ و $x=-۲$ به دست می‌آوریم.

$$(f-۲g)(۱)=f(۱)-۲g(۱)=b-۱-۲(۶)=b-۱۳\xrightarrow{\text{زوج مرتب}}(۱,b-۱۳)$$

$$(f-۲g)(۲)=f(۲)-۲g(۲)=a+۱-۲(۵)=a-۹\xrightarrow{\text{زوج مرتب}}(۲,a-۹)$$

$$(f-۲g)(-۲)=f(-۲)-۲g(-۲)=۴-۲c\xrightarrow{\text{زوج مرتب}}(-۲,۴-۲c)$$

در هر زوج مرتب، باید مولفه‌های اول و دوم برابر باشند:

$$(۱,b-۱۳)\to ۱=b-۱۳\to b=۱۴$$

$$(۲,a-۹)\to ۲=a-۹\to a=۱۱$$

$$(-۲,۴-۲c)\to -۲=۴-۲c\to c=۳$$

پس:

$$a+b+c=۱۱+۱۴+۳=۲۸$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷ تابع ثابت را به صورت $y=f(x)-mx=k$ در نظر بگیرید. پس $f(x)=mx+k$ است و در نتیجه شیب g برابر $-\frac{۱}{m}$ است و عرض از مبدأ آن k است.

$$y=۲mx+g(x)+n=۲mx-\frac{۱}{m}x+k+n=(۲m-\frac{۱}{m})x+k+n$$

چون این تابع همانی است، پس $۲m-\frac{۱}{m}=۱$ و $k+n=۰$ است.

$$۲m-\frac{۱}{m}=۱\Rightarrow ۲m^۲-m-۱=۰\xrightarrow{m>۰}m=۱$$

$$\Rightarrow f(x)=x+k\xrightarrow{f(۶)=۰}k=-۶\Rightarrow n=۶$$

$$\Rightarrow m+n=۷$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸ طبق فرض مساله، n ریشهٔ مضاعف مخرج $f(x)$ است.

$$۲x^۲+ax+b=۲(x-n)^۲ \Rightarrow \begin{cases} a=-۴n \\ b=۲n^۲ \end{cases}$$

حال دوباره نامعادله صورت سوال را بازنویسی می‌کنیم:

$$\Rightarrow \frac{x+a}{b-x}>۰ \Rightarrow \frac{x-۴n}{۲n^۲-x}>۰ \Rightarrow ۴n<x<۲n^۲$$

چون ۵ عدد صحیح در این بازه هست، پس:

$$۲n^۲-۴n-۱=۵ \Rightarrow n=۳$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۹ عبارت زیر رادیکال نباید منفی باشد.

$$\frac{|x-a|}{f(x)}\geq ۰ \Rightarrow \begin{cases} x=a \\ f(x)>۰ \Rightarrow -۲<x<۴ \end{cases}$$

برای آن‌که دامنه به صورت $(-۲,۴)$ باشد، باید $-۲\leq a\leq ۴$ باشد، پس:

$$a=-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴ \Rightarrow \text{مجموع مقادیر}=۷$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰

$$f(x)=x-۲+\frac{۹}{x-۲}+۲$$

فرض کنید $a=x-۲$ و $b=\frac{۹}{x-۲}$، پس:

$$a+b\geq ۲\sqrt{ab} \Rightarrow x-۲+\frac{۹}{x-۲}\geq ۲\sqrt{۹} \Rightarrow x-۲+\frac{۹}{x-۲}\geq ۶ \Rightarrow x+\frac{۹}{x-۲}\geq ۸$$

بنابراین، برد به صورت $[۸,+\infty)$ است.

$$f(a)=f(۸)=۸+\frac{۹}{۶}=۹/۵$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱ باید توابع $f(x-۱)$ و $g(x-۱)$ برابر باشند و شرط اول آن است که دامنهٔ یکسان داشته باشند، یعنی ریشهٔ مخرج یکسان داشته باشند.

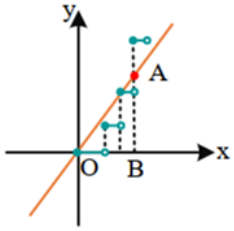
$$g(x+۱)=\frac{۱}{x+c} \Rightarrow g(x-۱)=\frac{۱}{x-۲+c}$$

شرط دوم هم این است که ضابطه دو تابع را برابر هم قرار بدیم:

$$\Rightarrow \frac{۱}{x-۲+c}=\frac{x-۲}{x^۲+ax+b}=\frac{x-۲}{(x-۲)^۲} \Rightarrow \begin{cases} c=۰ \\ f(x-۱)=\frac{۱}{x-۲} \xrightarrow{x=۱} f(۰)=-۱ \end{cases}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲ ارتفاع نمودار $\left[۲x^۲\right]$ به صورت یک واحد یک واحد افزایش پیدا می‌کند.



$$\left[۲x^۲\right]=۲ \Rightarrow ۲\leq ۲x^۲<۳ \Rightarrow ۱\leq x<\sqrt{\frac{۳}{۲}}$$

پس $x_B=\sqrt{\frac{۳}{۲}}$ و در نتیجه $AB=y_A=۲\sqrt{\frac{۳}{۲}}$ است.

$$S=\frac{۱}{۲}OB\times AB=\frac{۱}{۲}\times\sqrt{\frac{۳}{۲}}\times ۲\sqrt{\frac{۳}{۲}}=\frac{۳}{۲}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳ مجموع دو تابع نزولی اکید، مجدد تابعی اکیداً نزولی است.

$$(f+g)+(f-g)=۲f$$

پس f اکیداً نزولی و $-f$ اکیداً صعودی است. پس $x-f(x)$ نیز اکیداً صعودی است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۴ دامنهٔ تابع f اعداد مثبت است، پس هم $x^۲$ و هم $\log x$ و در نتیجه تابع f اکیداً صعودی هستند. با توجه به دامنه f، باید $x-۱$ مثبت باشد.

$$f(x-۱)<f(\frac{۱۰}{x+۲}) \xrightarrow{x>۱} x-۱<\frac{۱۰}{x+۲} \xrightarrow{x>۱} (x-۱)(x+۲)<۱۰$$

$$\Rightarrow x^۲+x-۱۲<۰ \Rightarrow -۴<x<۳ \xrightarrow{x>۱} ۱<x<۳$$

فقط $x=۲$ در نامعادله صدق می‌کند.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۵ تابع f اکیداً نزولی است و دامنهٔ آن بازهٔ $(-\infty,۲]$ است.

$$\begin{cases} \frac{x}{۲}\le ۲ \Rightarrow x\le ۴ \\ ۲x+a\le ۲ \Rightarrow x\le ۱-\frac{a}{۲} \end{cases}$$

$$f(\frac{x}{۲})\ge f(۲x+a) \Rightarrow \frac{x}{۲}\le ۲x+a \Rightarrow \frac{-۲a}{۳}\le x$$

در دو حالت، مجموعه جواب تک عضوی است.

۱) $\frac{-۲a}{۳}=۴ \Rightarrow a=-۶$ ۲) $۱-\frac{a}{۲}=\frac{-۲a}{۳} \Rightarrow a=-۶$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶ در این سوال، باید $x=۱۲-۲a$ از $x=a$ کوچک‌تر باشد (یا مساوی):

$$۱۲-۲a\le a \Rightarrow ۴\le a$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۷ نمودار تابع f از مبدأ عبور می‌کند.

$$f(۰)=۰ \Rightarrow ۳b+۹=۰ \Rightarrow b=-۳$$

$$f(x)=(ax-۳)(۳+۴x^۲)+۹=۴ax^۳-۱۲x^۲+۳ax$$

از طرفی، $f(x)=۴a(x-\frac{۱}{۲})^۳+\frac{a}{۲}$، پس تساوی زیر برقرار است:

$$۴ax^۳-۱۲x^۲+۳ax=۴ax^۳-۶ax^۲+۳ax \Rightarrow -۱۲=-۶a \Rightarrow a=۲$$

پس تابع $y=(b+۲)x^۳-a$ اکیداً نزولی است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۸ گزاره (الف) نادرست است، زیرا:

$$f(x)=۲(۲x-۳)^۲+۸x-۱۱\Rightarrow f(x)=۲(۴x^۲-۱۲x+۹)+۸x-۱۱$$

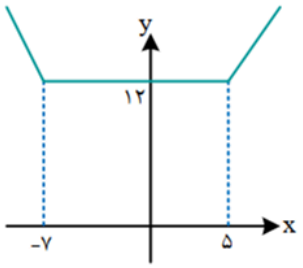
$$f(x)=۸x^۲-۱۶x+۷\Rightarrow \text{رأس } x=\frac{۱۶}{۱۶}=۱$$

$$f(۱)=۸-۱۶+۷=-۱\Rightarrow \text{رأس } y=-۱\Rightarrow R_f=[-۱,+\infty)$$

پس برد تابع f تمام اعداد طبیعی را شامل می‌شود.

گزاره (ب) صحیح است، زیرا نمودار تابع g به صورت زیر است:

$$g(x)=|x-۵|+|x+۷|\Rightarrow\begin{cases}x-۵+x+۷ & x\geq ۵\\ -x+۵+x+۷ & -۷<x<۵\\ -x+۵-x-۷ & x\leq -۷\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲x+۲ & x\geq ۵\\ ۱۲ & -۷<x<۵\\ -۲x-۲ & x\leq -۷\end{cases}$$



چون تابع g در بازهٔ $(-۷,۵)$ تابعی ثابت است، پس در این بازه هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود و طول این بازه برابر ۱۲ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۹

هر گردی گردو نیست! هر رابطه‌ای هم تابع نیست!

برای اینکه تشخیص دهیم که یک رابطه تابع است یا خیر، باید بتوانیم y را به طور یکتا برحسب x به دست آوریم.

تذکر:

اگر حداقل یک مثال نقض پیدا شود که برای یک x، ۲ مقدار y وجود داشته باشد، آن رابطه تابع نیست.

بررسی موارد:

روابط (الف) و (پ) و (ث) تابع نیستند ولی روابط (ب) و (ت) تابع هستند، زیرا:

(الف) $۲y^۳-۴xy+x^۳=۶\Rightarrow$ مثال نقض: $x=\sqrt[۳]{۶}\Rightarrow ۲y^۳-۴\sqrt[۳]{۶}y=۰\Rightarrow ۲y(y^۲-۲\sqrt[۳]{۶})=۰\Rightarrow\begin{cases}y=۰\\ y=\pm\sqrt{۲\sqrt[۳]{۶}}=\pm\sqrt[۶]{۴۸}\end{cases}$

(پ) $y^۲+\frac{۴x}{\sqrt{x^۲+۲}}=۰\Rightarrow$ مثال نقض: $x=-\sqrt{۲}\Rightarrow y^۲-\frac{۴\sqrt{۲}}{۲}=۰\Rightarrow y^۲-۲\sqrt{۲}=۰\Rightarrow y=\pm\sqrt{۲\sqrt{۲}}=\pm\sqrt[۴]{۸}$

(ث) $y^۲+xy+۲x^۲=۲۰\Rightarrow$ مثال نقض: $x=\sqrt{۱۰}\Rightarrow y^۲+\sqrt{۱۰}y=۰\Rightarrow y(y+\sqrt{۱۰})=۰\Rightarrow y=۰\ ,\ y=-\sqrt{۱۰}$

(ب) $y^۳-۹y^۲+۲۷y-۲۷x^۳=۰\Rightarrow y^۳-۹y^۲+۲۷y=۲۷x^۳\Rightarrow y^۳-۹y^۲+۲۷y-۲۷=۲۷x^۳-۲۷$

$$\Rightarrow (y-۳)^۳=۲۷x^۳-۲۷\Rightarrow y-۳=\sqrt[۳]{۲۷(x^۳-۱)}\Rightarrow y-۳=۳\sqrt[۳]{x^۳-۱}\Rightarrow y=۳\sqrt[۳]{x^۳-۱}+۳$$

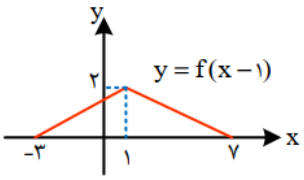
بدیهی است که رابطهٔ فوق تابع است زیرا به ازای هر مقدار برای x فقط یک مقدار برای y به دست می‌آید.

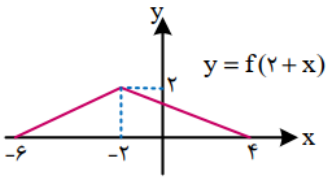
(ت) $۱۶x^۲+\frac{۱}{۴}y^۲+۸x-y+۲=۰\Rightarrow ۱۶x^۲+۸x+۱+\frac{۱}{۴}y^۲-y+۱=۰\Rightarrow (۴x+۱)^۲+(\frac{۱}{۲}y-۱)^۲=۰\Rightarrow\begin{cases}۴x+۱=۰\Rightarrow x=-\frac{۱}{۴}\\ \frac{۱}{۲}y-۱=۰\Rightarrow y=۲\end{cases}$

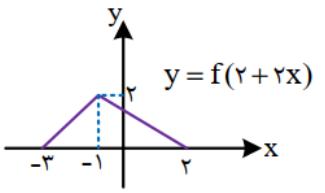
پس رابطهٔ فوق فقط دارای یک عضو به مختصات $(-\frac{۱}{۴},۲)$ است و بنابراین تابع است.

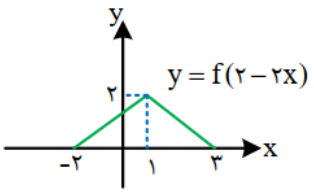
(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

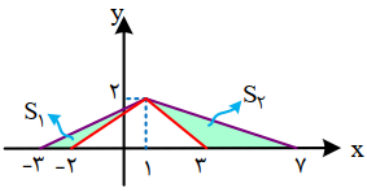
۳۰











طبق شکل، مساحت بین نمودار توابع $y = f(x-۱)$ و $y = f(۲-۲x)$ برابر است با:

$$\text{کل } S = S_۱ + S_۲ = \frac{۱}{۲} \times ۱ \times ۲ + \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۲ = ۱ + ۴ = ۵$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱ چون f و g تابع هستند، پس داریم:

$$f = \{(|m|, ۲k-۱), (k+۳, ۳k), (|m|, ۵), (۶, n+۲), (n-۴, ۱۱), (۲, ۴)\}$$

$$g = \{(n-۵, m-۱), (۹, -۲), (k+۸, ۰), (۲, -۱), (m+۵, -۳), (k+۱, -n)\}$$

$$(|m|, ۲k-۱) \in f \ , \ (|m|, ۵) \in f \Rightarrow ۲k-۱ = ۵ \Rightarrow k = ۳$$

$$(k+۳, ۳k) \in f \ , \ (۶, n+۲) \in f \xrightarrow{k=۳} (۶, ۹) \in f \ , (۶, n+۲) \in f$$

$$\Rightarrow n+۲ = ۹ \Rightarrow n = ۷$$

$$(n-۵, m-۱) \in g \ , \ (۲, -۱) \in g \xrightarrow{n=۷} (۲, m-۱) \in g \ , (۲, -۱) \in g$$

$$\Rightarrow m-۱ = -۱ \Rightarrow m = ۰$$

$$f = \{(۰, ۵), (۶, ۹), (۳, ۱۱), (۲, ۴)\}$$

$$g = \{(۲, -۱), (۹, -۲), (۱۱, ۰), (۵, -۳), (۴, -۷)\}$$

$$gof = \{(۰, -۳), (۶, -۲), (۳, ۰), (۲, -۷)\}$$

$$\text{مجموع اعضای برد } gof = (-۳) + (-۲) + (۰) + (-۷) = -۱۲$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۲

$$y=۲f(-\frac{x}{۳})+۱ \Rightarrow D_۱=[-۱۲,۳۰]\ ,\ R_۱=[-۳۹,۳۳]$$

$$-۱۲\le x\le ۳۰ \Rightarrow -۴\le \frac{x}{۳}\le ۱۰ \Rightarrow -۱۰\le -\frac{x}{۳}\le ۴$$

$$\Rightarrow \text{باید } -۱۰\le ۳-۴x\le ۴ \Rightarrow -۱۳\le -۴x\le ۱ \Rightarrow -\frac{۱}{۴}\le x\le \frac{۱۳}{۴} \Rightarrow D_۲=\left[-\frac{۱}{۴},\frac{۱۳}{۴}\right]$$

$$\Rightarrow [a,b]=[-\frac{۱}{۴},\frac{۱۳}{۴}] \Rightarrow a=-\frac{۱}{۴}\ ,\ b=\frac{۱۳}{۴}$$

پس تابع $y=۸a-bf(x+۱)$ به صورت $y=-۲-\frac{۱۳}{۴}f(x+۱)$ خواهد بود که باید برد آن را بیابیم:

$$y=۲f(-\frac{x}{۳})+۱ \Rightarrow R_۱=[-۳۹,۳۳]$$

$$\Rightarrow -۳۹\le ۲f(-\frac{x}{۳})+۱\le ۳۳ \Rightarrow -۴۰\le ۲f(-\frac{x}{۳})\le ۳۲ \Rightarrow -۲۰\le f(-\frac{x}{۳})\le ۱۶$$

چون انتقال یا انبساط و انقباض منحنی در راستای محور xها هیچ تاثیری در برد تابع ندارد، پس داریم:

$$-۲۰\le f(x+۱)\le ۱۶ \Rightarrow -۵۲\le -\frac{۱۳}{۴}f(x+۱)\le ۶۵ \Rightarrow -۵۴\le -۲-\frac{۱۳}{۴}f(x+۱)\le ۶۳ \Rightarrow [c,d]=[-۵۴,۶۳]$$

$$\Rightarrow c=-۵۴\ ,\ d=۶۳ \Rightarrow c+d=۹$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۳

چون دو تابع f و g با هم مساویند و نقطهٔ $x=۴$ نقطهٔ مرزی تابع $g(x)$ است، پس باید ریشهٔ عبارت داخل قدرمطلق $x=۴$ باشد، تا پس از تعیین علامت قدرمطلق، نقطهٔ مرزی تابع f هم $x=۴$ باشد، پس باید داشته باشیم:

$$x+۳m=۰ \Rightarrow ۴+۳m=۰ \Rightarrow m=-\frac{۴}{۳}$$

$$\Rightarrow f(x)=۲x+۲|x-۴|=\begin{cases}۴x-۸ & x\ge ۴\\ ۸ & x<۴\end{cases}$$

چون f و g با هم مساویند پس باید داشته باشیم:

$$۱)\ \frac{ax^۲+۲bx-۱۲}{x+c}=۴x-۸ \Rightarrow ax^۲+۲bx-۱۲=۴x^۲+(۴c-۸)x-۸c \Rightarrow \begin{cases}a=۴\\ ۲b=۴c-۸\\ -۱۲=-۸c \Rightarrow c=\frac{۳}{۲}\xrightarrow{\text{جایگذاری در رابطهٔ دوم}} b=-۱\end{cases}$$

$$۲)\ ۴dx^۲+ex+f=۸ \Rightarrow d=۰\ ,\ e=۰\ ,\ f=۸$$

پس معادله تابع h به صورت $h(x)=۳x^۲-۳x+۸$ خواهد بود که عرض نقطهٔ رأس آن برابر است با:

$$\text{رأس } y=\frac{-\Delta}{۴a}=\frac{۴(۳)(۸)-۹}{۱۲}=\frac{۸۷}{۱۲}=\frac{۲۹}{۴}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۴ چون تابع f تابعی همانی است، پس باید ورودی و خروجی تابع f با هم برابر باشند، یعنی باید داشته باشیم:

$$f\left(x^3+4x^2-\left[\frac{x}{2}\right]\right)=\left[\frac{-x}{2}\right]-4x \Rightarrow x^3+4x^2-\left[\frac{x}{2}\right]=\left[\frac{-x}{2}\right]-4x \Rightarrow x^3+4x^2+4x=\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{-x}{2}\right]$$

می‌دانیم به ازای هر عدد حقیقی x همواره داریم:

$$\left[\frac{x}{2}\right]+\left[-\frac{x}{2}\right]=\begin{cases}0 & \frac{x}{2}\in\mathbb{Z}\\ -1 & \frac{x}{2}\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

پس معادله به یکی از صورت‌های زیر تبدیل می‌شود:

اگر $\frac{x}{2}\in\mathbb{Z}: x^3+4x^2+4x=0 \Rightarrow x(x^2+4x+4)=0$

$$\Rightarrow x(x+2)^2=0 \Rightarrow \begin{cases}x=0\\ x=-2\end{cases} \Rightarrow$$ هر دو قابل قبول، زیرا شرط $\frac{x}{2}\in\mathbb{Z}$ برقرار است.

اگر $\frac{x}{2}\notin\mathbb{Z}: x^3+4x^2+4x=-1 \Rightarrow x^3+4x^2+4x+1=0$

$$x^3+1+4x^2+4x=0 \Rightarrow (x+1)(x^2-x+1)+4x(x+1)=0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x^2-x+1+4x)=0 \Rightarrow (x+1)(x^2+3x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases}x=-1\\ x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$

هر سه جواب قابل قبول هستند، زیرا شرط $\frac{x}{2}\notin\mathbb{Z}$ برقرار است. پس ضابطهٔ تابع f به صورت:

$$f=\left\{\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2},\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right),\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2},\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right),(0,0),(-1,-1),(-2,-2)\right\}$$

است که مجموع اعضای برد آن برابر است با:

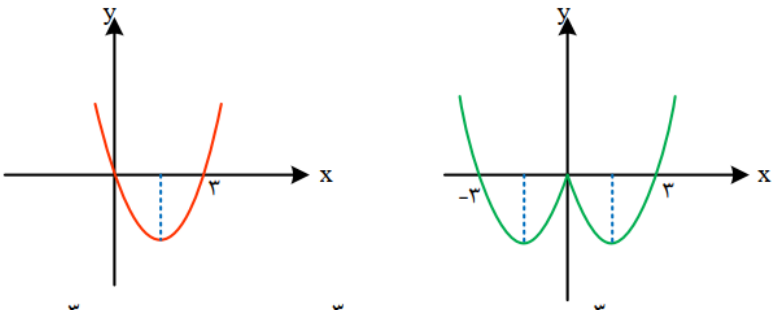
$$\frac{-3+\sqrt{5}}{2}+\frac{-3-\sqrt{5}}{2}+0+(-1)+(-2)=-6$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۵ نمودار تابع f را از طریق انتقال رسم می‌کنیم:

$$y=x^2-3x \xrightarrow{\text{تبدیل } x \text{ به } |x|} y=|x|^2-3|x| \Rightarrow y=x^2-3|x|$$

بنابراین کافی است ابتدا سهمی $y=x^2-3x$ را رسم کنیم، سپس انتقال $f(|x|)$ را انجام دهیم یعنی باید قسمت‌های سمت چپ محور عرض‌ها را در نمودار $y=x^2-3x$ حذف کنیم و قسمت‌های سمت راست محور yها را عیناً رسم کرده و علاوه بر آن قرینهٔ قسمت‌های سمت راست را نیز نسبت به محور yها در سمت چپ رسم کنیم.



طبق شکل، تابع f در بازهٔ $(-\frac{3}{2},-3)$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $(-\frac{3}{2},0)$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $(0,\frac{3}{2})$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $(\frac{3}{2},3)$ اکیداً صعودی است، پس وضعیت یکنوایی تابع در بازهٔ $(-3,3)$ سه بار تغییر می‌کند.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۶

$$f(x)=۱-۸x-۲x^۲ \xrightarrow{\text{۳واحد به چپ}} y=۱-۸(x+۳)-۲(x+۳)^۲$$

$$y=۱-۸x-۲۴-۲(x^۲+۶x+۹) \Rightarrow y=-۲x^۲-۲۰x-۴۱ \xrightarrow{\text{۳۰ واحد به بالا}} y=-۲x^۲-۲۰x-۴۱+۳۰$$

$$\Rightarrow y=-۲x^۲-۲۰x-۱۱ \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور y ها}} y=-۲(-x)^۲-۲۰(-x)-۱۱ \Rightarrow y=-۲x^۲+۲۰x-۱۱$$

$$\begin{cases} y=-۲x^۲+۲۰x-۱۱ \\ y=۱-۸x-۲x^۲ \end{cases} \Rightarrow -۲x^۲+۲۰x-۱۱=۱-۸x-۲x^۲ \Rightarrow ۲۸x=۱۲ \Rightarrow x=\frac{۳}{۷}$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{۳}{۷} \Rightarrow [-۳\alpha]=\left[-\frac{۹}{۷}\right]=-۲$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۷

اگر $k \le ۰$، آن‌گاه $\frac{۱}{\sqrt{۲-x}}-k>۰$، پس: $D_f=(-\infty,۲)$

اما اگر $k>۰$، آن‌گاه علاوه بر شرط $۲-x>۰$، یعنی $x<۲$ باید نامعادله $\frac{۱}{\sqrt{۲-x}}-k \ge ۰$ را هم حل کنیم و جواب به دست آمده آن را با بازه $(-\infty,۲)$ اشتراک بگیریم.

$$\frac{۱}{\sqrt{۲-x}} \ge k \Rightarrow \sqrt{۲-x} \le \frac{۱}{k} \Rightarrow ۲-x \le \frac{۱}{k^۲} \Rightarrow x \ge ۲-\frac{۱}{k^۲} \quad , \quad ۲-\frac{۱}{k^۲}=۱ \Rightarrow \frac{۱}{k^۲}=۱$$

آن‌گاه: $k=۱$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۸

$$f(x)=\begin{cases} \frac{۱}{۳}x+۲ & x \ge ۰ \\ ۲x+۲ & x \le ۰ \end{cases} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\begin{cases} ۳(x-۲) & x \ge ۲ \\ \frac{x-۲}{۲} & x \le ۲ \end{cases}$$

$$h(۵)=gof^{-۱}(۵)=g(۹)=۹$$

$$h(-۴)=gof^{-۱}(-۴)=g(-۳)=-۳$$

$$h(-۴)+h(۵)=۹-۳=۶$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۹

$$\begin{matrix} f(x)=-\frac{۱}{۳}x+۱ \\ g(x)=۳x+۱ \end{matrix} \Rightarrow f+g=\frac{۸}{۳}x+۲ \ , \ g-f=\frac{۱۰}{۳}x$$

$$y=\frac{\frac{۸}{۳}x+۲}{\frac{۱۰}{۳}x}=\frac{۸x+۶}{۱۰x}=\frac{۴x+۳}{۵x}$$

$$y^{-۱}=\frac{۳}{۵x-۴}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۰ تابع اکیداً صعودی است، لذا تابع، وارون خودش را روی نیمساز ربع اول و سوم قطع می‌کند. پس تابع را با نیمساز ربع اول و سوم تلاقی می‌دهیم.

$$\sqrt{۲x+۵}-۱=x \Rightarrow \sqrt{۲x+۵}=x+۱ \Rightarrow x+۱\geq ۰$$

$$۲x+۵=x^۲+۲x+۱ \Rightarrow x^۲=۴ \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ x=-۲ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$M\Big|_{۲}^{۲} \Rightarrow x_M+y_M=۴$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۱ تابع f را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases} x-۲x+x-۱=-۱ & x\geq ۱ \\ x-۲x-x+۱=۱-۲x & ۰\leq x\leq ۱ \\ x+۲x-x+۱=۲x+۱ & x\leq ۰ \end{cases}$$

با توجه به ضابطهٔ به دست آمده، تابع در بازه $[۰,۱]$ نزولی اکید است.

$$f(x)=۱-۲x \; ; \; ۰\leq x\leq ۱ , -۱\leq y\leq ۱$$

$$f^{-۱}(x)=\frac{۱-x}{۲} \; ; \; -۱\leq x\leq ۱$$

دقت شود که برد تابع، دامنهٔ تابع وارون خواهد شد.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۲ چون توابع f و g خطی هستند و $f-۳g$ ثابت است، پس:

$$f(x)=۳ax+b'$$
$$g(x)=ax+b$$

از طرفی، تابع $f-۲g$ همانی است.

$$f-۲g=۳ax+b'-۲ax-۲b=ax+b'-۲b$$

پس، $a=۱$ و $b'-۲b=۰$ یعنی $a=۱$ و $b'=۲b$

$$\begin{cases} f(x)=۳x+۲b \\ g(x)=x+b \end{cases}$$

دو تابع در $y=۱$ یکدیگر را قطع می‌کنند.

$$g(x)=۱ \Rightarrow x=۱-b$$

$$f(x)=۱ \Rightarrow x=\frac{۱-۲b}{۳} \Rightarrow ۱-b=\frac{۱-۲b}{۳} \Rightarrow ۳-۳b=۱-۲b \Rightarrow b=۲$$

$$\begin{cases} f(x)=۳x+۴ \\ g(x)=x+۲ \Rightarrow g^{-۱}(x)=x-۲ \end{cases} \Rightarrow fog^{-۱}(-۱)=-۵$$

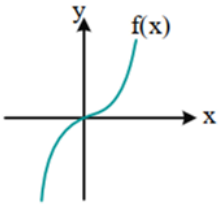
(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۳ ابتدا ضابطهٔ تابع f را به دست می‌آوریم:

$$g=-۲x+۱\Rightarrow x=\frac{۱-g}{۲}\ ,fog(x)=-۸x^۳+۱۲x^۲-۸x+۲$$

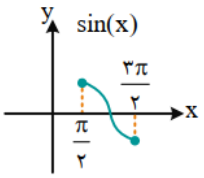
$$\Rightarrow f(g)=-۸(\frac{۱-g}{۲})^۳+۱۲(\frac{۱-g}{۲})^۲-۸(\frac{۱-g}{۲})+۲\Rightarrow f(g)=(g-۱)^۳+۳(g-۱)^۲+۴(g-۱)+۲=g^۳+g\Rightarrow f(x)=x^۳+x$$

توابع $y=x$ و $y=x^۳$ اکیداً صعودی می‌باشند. بنابراین تابع مجموع آن‌ها یعنی $f(x)$ نیز اکیداً صعودی است. این تابع از مبدأ مختصات عبور می‌کند و چون اکیداً صعودی می‌باشد فقط از نواحی اول و سوم می‌گذرد.

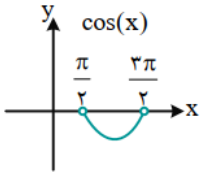


(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

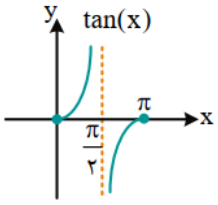
۴۴



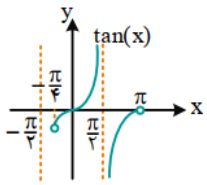
۱) تابع $\sin(x)$ در بازهٔ $[\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}]$ یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است. $\Rightarrow \frac{\pi}{۴}\le x\le\frac{۳\pi}{۴}\Rightarrow\frac{\pi}{۲}\le ۲x\le\frac{۳\pi}{۲}$



۲) تابع $\cos(x)$ در بازهٔ $(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ یک‌به‌یک و وارون‌پذیر نیست. $\Rightarrow \frac{\pi}{۶}<x<\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\frac{\pi}{۲}<۳x<\frac{۳\pi}{۲}$



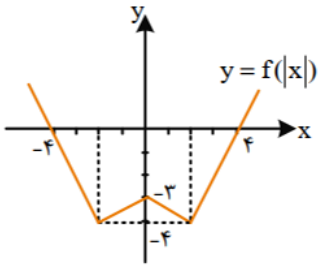
۳) تابع $\tan(x)$ در بازهٔ $[۰,\pi]$ یک‌به‌یک و وارون‌پذیر نیست. $\Rightarrow ۰\le x\le\frac{\pi}{۲}\Rightarrow ۰\le ۲x\le\pi$

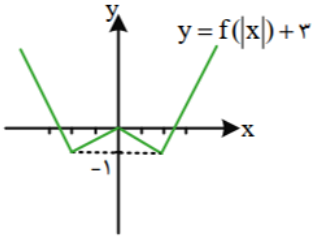


۴) تابع $\tan(x)$ در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۴},\pi)$ یک‌به‌یک و وارون‌پذیر نیست. $\Rightarrow -\frac{\pi}{۲}<x<۲\pi\Rightarrow-\frac{\pi}{۴}<\frac{x}{۲}<\pi$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

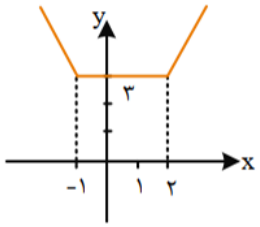
۴۵ اگر نمودار تابع $y=f(|x|)+۳$ را رسم کنیم، طبق شکل، تابع محور xها را در سه نقطه قطع می‌کند. برای رسم نمودار تابع از قواعد انتقال استفاده شده است.



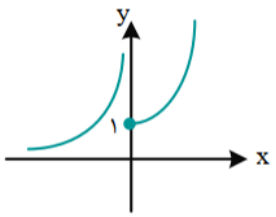


(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۶ با رسم نمودار تابع $f(x)=|x+1|+|x-2|$ در دستگاه محورهای مختصات مشخص می‌شود که تابع f در بازهٔ $[-1,+\infty)$ صعودی است و بنابراین گزاره الف صحیح است.



با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x} & x<0\\ 1+x^3 & x\geq 0\end{cases}$ در دستگاه محورهای مختصات مشخص می‌شود که تابع در دامنه‌اش غیریکنواست. بنابراین گزاره ب نادرست است.



(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۷ چون f تابعی خطی است و f^{-1} با f موازی است، پس قطعاً شیب هر دو تابع f و f^{-1} برابر ۱ بوده است زیرا نمودار تابع f^{-1} قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $y=x$ است. یعنی معادلهٔ تابع f به صورت $f(x)=x+b$ بوده است، حال داریم:

$$f(x)=x+b \Rightarrow fof(x)=f(x+b)=x+2b$$
$$\Rightarrow fofof(x)=f(x+2b)=x+3b$$

طبق فرض باید $x+3b=ax+3\sqrt{2}-6$ باشد، یعنی داریم:

$$a=1\,,\ b=\sqrt{2}-2 \Rightarrow f(x)=x+\sqrt{2}-2$$
$$\Rightarrow x=y+2-\sqrt{2} \Rightarrow f^{-1}(x)=x+2-\sqrt{2}$$

بنابراین وارون تابع f برابر است با:

فاصلهٔ بین دو خط موازی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$d=\frac{|(\sqrt{2}-2)-(2-\sqrt{2})|}{\sqrt{1+1}}=\frac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}-2$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۸

$$f(x)=(3x-2)^3-1 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور عرض‌ها}} y=(-3x-2)^3-1 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور طول‌ها}} y=-(-3x-2)^3+1$$
$$\Rightarrow y=(3x+2)^3+1 \xrightarrow{\text{a واحد به راست و }(a-1)\text{ به بالا}} y=\big(3(x-a)+2\big)^3+1+a-1 \Rightarrow g(x)=(3x-3a+2)^3+a$$

چون تابع g تابعی اکیداً صعودی و پیوسته است پس تابع g^{-1} را روی خط $y=x$ قطع می‌کند و بنابراین باید $g(3)=3$ باشد (یعنی باید طول و عرض نقطهٔ تلاقی هر دو، برابر ۳ باشد.)

$$g(3)=3 \Rightarrow (9-3a+2)^3+a=3 \Rightarrow (11-3a)^3=3-a$$

با امتحان گزینه‌ها مشخص می‌شود که $a=4$ جواب این معادله است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۹

$$f(x)=\sqrt{(x^۲+۴x+۴)(x^۳-۴x^۲)}=\sqrt{(x+۲)^۲x^۲(x-۴)}$$

$$(x+۲)^۲x^۲(x-۴)\geq ۰\Rightarrow D_f=[۴,+\infty)\cup\{-۲,۰\}$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g\,|\,g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}|(x^۲-۳x)\in D_f\}$$

$$\begin{cases}x^۲-۳x\geq ۴\Rightarrow x^۲-۳x-۴\geq ۰\Rightarrow (x-۴)(x+۱)\geq ۰\xrightarrow[\text{تعیین علامت}]{}x\leq -۱\text{ یا }x\geq ۴ \quad (۱)\\ x^۲-۳x=۰\Rightarrow x(x-۳)=۰\Rightarrow x=۰,x=۳ \quad (۲)\\ x^۲-۳x=-۲\Rightarrow x^۲-۳x+۲=۰\Rightarrow (x-۱)(x-۲)=۰\Rightarrow x=۱,x=۲ \quad (۳)\end{cases}$$

$$(۱),(۲),(۳)\text{ اجتماع}\Rightarrow D_{fog}=(-\infty,-۱]\cup[۴,+\infty)\cup\{۰,۱,۲,۳\}$$

پس در دامنهٔ تابع fog تمام اعداد صحیح وجود دارند.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۰

تابع $y=f(x)$ اکیداً نزولی است، پس تابع $y=f(-x+۱)$ اکیداً صعودی است. (زیرا نمودار $y=f(-x+۱)$ از انتقال یک واحدی به سمت چپ و سپس قرینه کردن نمودار نسبت به محور y ها به دست می‌آید.) از طرفی، چون $f(-۴)=۰$ است، پس تابع $y=f(-x+۱)$ محور xها را در نقطهٔ $x=۵$ قطع می‌کند. از این رو خواهیم داشت:

x		-۲		۲		۵	
$x^۲-۴$	$+$	۰	$-$	۰	$+$		$+$
$f(-x+۱)$	$-$		$-$		$-$	۰	$+$
$(x^۲-۴)f(-x+۱)$	$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$

$$D_g=[-۲,۲]\cup[۵,+\infty)$$

پس اعداد طبیعی $x=۳$ و $x=۴$ در دامنهٔ تابع g قرار ندارند، یعنی دامنهٔ تابع g، فقط دو عدد طبیعی را شامل نمی‌شود.

تذکر: چون تابع $y=f(-x+۱)$ اکیداً صعودی است و در نقطهٔ $x=۵$، محور xها را قطع می‌کند، پس قبل از $x=۵$، مقادیر تابع، منفی و بعد از $x=۵$، مقادیر تابع، مثبت است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۱

$$g^{-۱}(x)=۳x-۲\Rightarrow y=۳x-۲\Rightarrow x=\frac{y+۲}{۳}\Rightarrow g(x)=\frac{x+۲}{۳}$$

$$(fog)(x)=f\big(g(x)\big)=f\left(\frac{x+۲}{۳}\right)=۹\left(\frac{x+۲}{۳}\right)^۲-۲۴\left(\frac{x+۲}{۳}\right)-۶۵$$

$$(fog)(x)=x^۲+۴x+۴-۸x-۱۶-۶۵\Rightarrow (fog)(x)=x^۲-۴x-۷۷$$

$$(fog)(x)=(x-۱۱)(x+۷)\Rightarrow (fog)(x)<۰\Rightarrow (x-۱۱)(x+۷)<۰$$

$$\xrightarrow[\text{تعیین علامت}]{}-۷<x<۱۱\Rightarrow (a,b)=(-۷,۱۱)\Rightarrow \max(b-a)=۱۸$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۲

با توجه به $f=\{(a,b),(۴,a),(b,۲),(۴,a^۲),(۴a,b^۲)\}$ داریم:

$$\left.\begin{matrix}(۴,a)\in f\\ (۴,a^۲)\in f\end{matrix}\right\}\Rightarrow a^۲=a\Rightarrow \begin{cases}a=۰\Rightarrow \begin{cases}(۰,b)\in f\\ (۰,b^۲)\in f\end{cases}\Rightarrow b^۲=b\Rightarrow \begin{cases}b=۰\Rightarrow (۰,۰),(۰,۲)\in f\text{ غ ق ق}\\ b=۱\Rightarrow (a,b)=(۰,۱)\end{cases}\\ a=۱\Rightarrow \begin{cases}(۴,۱)\in f\\ (۴,b^۲)\in f\end{cases}\Rightarrow b^۲=۱\Rightarrow \begin{cases}b=۱\Rightarrow (۱,۱),(۱,۲)\in f\text{ غ ق ق}\\ b=-۱\Rightarrow (a,b)=(۱,-۱)\end{cases}\end{cases}$$

(a,b) می‌تواند یکی از دو زوج مرتب $(۰,۱)$ و یا $(۱,-۱)$ باشد.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۳ برد دو تابع را به دست می‌آوریم. طول رأس سهمی میانگین ریشه‌هاست.

$$f(x)=x(x-۴)\Rightarrow x_{\text{رأس}}=۲\Rightarrow y_{\text{رأس}}=۲\times-۲=-۴\Rightarrow R_f=[-۴,+\infty)$$

$$g(x)=۲x(x-۲)\Rightarrow x_{\text{رأس}}=۱\Rightarrow y_{\text{رأس}}=۲\times۱\times-۱=-۲\Rightarrow R_g=[-۲,+\infty)$$

بنابراین: $R_f-R_g=[-۴,-۲)$ که شامل دو عدد صحیح -۳ و -۴ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۴

۱) $$y=\begin{cases}۲x-۱ & x<۱\Rightarrow ۲x-۱<۱\Rightarrow D_۱=(-\infty,۱)\ ,R_۱=(-\infty,۱)\\ x+\frac{۱}{۲} & x\geq ۱\Rightarrow x+\frac{۱}{۲}\geq\frac{۳}{۲}\Rightarrow D_۲=[۱,+\infty)\ ,\ R_۲=[\frac{۳}{۲},+\infty)\end{cases}\Rightarrow D=\mathbb{R}\ ,R=\mathbb{R}-[۱,\frac{۳}{۲})$$

۲) $$y=\begin{cases}-x+۱ & x\geq ۰\Rightarrow -x\leq ۰\Rightarrow -x+۱\leq ۱\Rightarrow D_۱=[۰,+\infty)\ ,\ R_۱=(-\infty,۱]\\ ۲x+۱ & x<۰\Rightarrow ۲x+۱<۱\Rightarrow D_۲=(-\infty,۰)\ ,\ R_۲=(-\infty,۱)\end{cases}\Rightarrow D=\mathbb{R}\ ,\ R=(-\infty,۱]$$

۳) $$y=\begin{cases}-x-۲ & x<-۱\Rightarrow -x>۱\Rightarrow -x-۲>-۱\Rightarrow D_۱=(-\infty,-۱)\ ,\ R_۱=(-۱,+\infty)\\ -x & x\geq -۱\Rightarrow -x\leq ۱\Rightarrow D_۲=[-۱,+\infty)\ ,\ R_۲=(-\infty,۱]\end{cases}\Rightarrow D=R=\mathbb{R}\ \checkmark$$

۴) $$y=\begin{cases}x+۲ & x<۰\Rightarrow x+۲<۲\Rightarrow D_۱=(-\infty,۰),R_۱=(-\infty,۲)\\ x-۲ & x>۲\Rightarrow x-۲>۰\Rightarrow D_۱=(۲,+\infty)\ ,\ R_۲=(۰,+\infty)\end{cases}\Rightarrow D=\mathbb{R}-[۰,۲]\ ,\ R=\mathbb{R}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۵

اگر $x\geq ۲\Rightarrow (x+۲)^۲=۴x+۱\Rightarrow$ جواب ندارد

اگر $x<۲\Rightarrow (۲x-۳)^۲=۴x+۱\Rightarrow x^۲-۴x+۲=۰\Rightarrow x=۲-\sqrt{۲}$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۶

$$f(x)=۱-۳\sin^۲x\cos^۲x+m(۱-۲\sin^۲x\cos^۲)=۱+m-(۳+۲m)\sin^۲x\cos^۲x$$

$$\Rightarrow ۳+۲m=۰\Rightarrow m=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow f(x)=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow f(۱۴۰۳)=-\frac{۱}{۲}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۷

می‌دانیم: $fog(a)=۲\Rightarrow f\big(g(a)\big)=۲\Rightarrow f^{-۱}(۲)=g(a)$

بنابراین: $gof^{-۱}(۲)=۳\Rightarrow gog(a)=۳$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۸

تابع g را ساده می‌کنیم:

$$g(x)=[x-۱]+[۲-x]=[x]+[-x]+۱=\begin{cases}۱ & x\in\mathbb{Z}\\ ۰ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

$fog(x)$ یک تابع ثابت با برد $\{۲\}$ است. بنابراین:

$$f(۰)=f(۱)=۲$$

$$\begin{cases}f(۰)=۲\Rightarrow b=۲\\ f(۱)=۲\Rightarrow ۱+a+b=۲\Rightarrow a=-۱\end{cases}$$

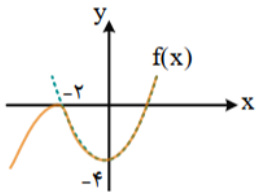
خواهیم داشت: $a-b=-۳$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۹

روش اول:

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



$$f(x)=\begin{cases}-x^{۲}+۴ & x<-۲\\ x^{۲}-۴ & x\geq -۲\end{cases}$$

واضح است که تابع در فاصلهٔ $(-۲,۰)$ اکیداً نزولی است.

$$y=x^{۲}-۴\Rightarrow x^{۲}=y+۴\Rightarrow x=\pm\sqrt{y+۴}\xrightarrow{-۲<x<۰}x=-\sqrt{y+۴}\Rightarrow y^{-۱}=-\sqrt{x+۴}$$

روش دوم:

دامنه و برد تابع در این بازه اعداد منفی هستند $(-۴,۰)\rightarrow(-۲,۰)$

و فقط در گزینه ۲ دامنه و برد تابع اعداد منفی است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۰

$-۱\leq a\leq -۴$ بوده و در نتیجه $f(a)\geq ۰$ است. در فاصلهٔ $[۰,+\infty)$ تابع f اکیداً صعودی است. بنابراین:

$$fof(a)\geq f(۲)\Rightarrow f\big(f(a)\big)\geq f(۲)\Rightarrow f(a)\geq ۲$$

با توجه به نمودار $a=-۳$ می‌باشد.

$$fof(a+۲)=fof(-۱)=f\big(f(-۱)\big)=f(۰)=۰$$

خواهیم داشت:

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۱

تابع را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$\text{اگر } b>۰\Rightarrow f(x)=\begin{cases}(a+b)x+c & x\geq -\frac{c}{b}\\ (a-b)x-c & x<-\frac{c}{b}\end{cases}$$

$$\text{اگر } b<۰\Rightarrow f(x)=\begin{cases}(a-b)x-c & x\geq -\frac{c}{b}\\ (a+b)x+c & x<-\frac{c}{b}\end{cases}$$

در هر دو حالت، برای اینکه تابع f وارون‌پذیر باشد، باید اکیداً یکنوا بوده و ضریب x در هر دو ضابطه هم‌علامت باشند. بنابراین:

$$(a+b)(a-b)>۰\Rightarrow a^{۲}-b^{۲}>۰$$

نتیجه می‌گیریم تابع $y=(a^{۲}-b^{۲})x^{۳}$ همواره اکیداً صعودی است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۲

فرض کنید $f(x)=ax+b$ باشد:

$$fof(x)=a(ax+b)+b$$

$$fof(۲x)=۲a^{۲}x+ab+b=۸x-۶\Rightarrow\begin{cases}۲a^{۲}=۸\xrightarrow{a>۰}a=۲\\ ab+b=-۶\xrightarrow{a=۲}b=-۲\end{cases}\Rightarrow f(x)=۲x-۲\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x+۲}{۲}$$

$$f^{-۱}\big(۲f(-۱)\big)=f^{-۱}(-۸)=\frac{-۸+۲}{۲}=-۳$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۳ ابتدا دامنهٔ $fof(x)$ را تشکیل می‌دهیم.

$$D_{fof(x)} = \{x \in D_f \,|\, f(x) \in D_f\} = \left\{۲ \le x \le ۳ \,\middle|\, ۲ \le \frac{۳x}{۲x-۱} \le ۳\right\}$$

نامعادله را به صورت زیر حل می‌کنیم:

$$۲ \le \frac{۳x}{۲x-۱} \le ۳ \Rightarrow ۲ - \frac{۵}{۲} \le \frac{۳x}{۲x-۱} - \frac{۵}{۲} \le ۳ - \frac{۵}{۲} \Rightarrow \left|\frac{-۴x+۵}{۲(۲x-۱)}\right| \le \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow ۴(-۴x+۵)^۲ \le (۴x-۲)^۲$$

$$\Rightarrow (-۸x+۱۰-۴x+۲)(-۸x+۱۰+۴x-۲) \le ۰ \Rightarrow ۱ \le x \le ۲$$

$$\Rightarrow D_{fof} = \{۲\} \Rightarrow fof(۲) = ۲$$

پس برد fof فقط شامل عدد صحیح ۲ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۴

$$y = f(۱-۲x) \xrightarrow{\text{بازتاب به مبدأ}} -y = f(۱+۲x) \Rightarrow y = -f(۱+۲x) \Rightarrow f^{-۱}(-y) = ۱+۲x$$

$$\Rightarrow x = \frac{f^{-۱}(-y)-۱}{۲} \Rightarrow y = \frac{f^{-۱}(-x)-۱}{۲} \xrightarrow{\text{بازتاب به مبدأ}} -y = \frac{f^{-۱}(x)-۱}{۲} \Rightarrow y = \frac{۱-f^{-۱}(x)}{۲}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۵

۲ واحد به راست: $y = \frac{۲}{۳(x-۲)-۱} = \frac{۲}{۳x-۷}$

قرینه نسبت به xها: $y = \frac{-۲}{۳x-۷}$

k واحد انتقال به چپ: $y = \frac{-۲}{۳(x+k)-۷} = \frac{-۲}{۳x+۳k-۷}$

به شرطی نمودار نهایی بر وارون خود منطبق است که $۳k-۷=۰$ باشد، پس $k = \frac{۷}{۳}$ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۶ تابع f اکیداً صعودی است. پس:

$$fof(x) - f(x) \ge ۰ \Rightarrow fof(x) \ge f(x) \Rightarrow f(x) \ge x \Rightarrow \sqrt{۳x+۴} \ge x \quad (۱)$$

با توجه به اینکه $۳x+۴ \ge ۰$ است، پس $x \ge \frac{-۴}{۳}$ است. به ازای هر عدد منفی x در بازهٔ $\left[-\frac{۴}{۳}, ۰\right]$ رابطهٔ (۱) برقرار است. حال اگر $x > ۰$ باشد، داریم:

$$\sqrt{۳x+۴} \ge x \Rightarrow ۳x+۴ \ge x^۲ \Rightarrow x^۲ - ۳x - ۴ \le ۰$$

$$x > ۰ \Rightarrow ۰ < x \le ۴$$

در نهایت شرط $f(x) \in D_f$ را هم در نظر می‌گیریم تا دامنه به صورت بازهٔ $\left[-\frac{۴}{۳}, ۴\right]$ در بیاید.

$$\beta - \alpha = \frac{۱۶}{۳}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۷ دامنهٔ تابع g به صورت $x \le -۱$ و برد آن به صورت $y \ge -۱$ است. پس ضابطهٔ g به صورت $g(x) = -۱ + \sqrt{-x-۱}$ است. حال دو تابع مفروض را قطع می‌دهیم:

$$\begin{cases} y = -x-۴ \\ y = f^{-۱}og(x) \end{cases} \Rightarrow f^{-۱}og(x) = -x-۴ \Rightarrow g(x) = f(-x-۴)$$

$$\Rightarrow -۱ + \sqrt{-x-۱} = \sqrt{-x-۴-۲} \Rightarrow \sqrt{-x-۱} = ۱ + \sqrt{-x-۶}$$

با آزمایش گزینه‌ها، $x = -۱۰$ قابل قبول است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۸ اگر $a=-d$ باشد، نمودار $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ بر وارون خود منطبق است.

$$f(x)=\frac{x}{x-1}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{x-1}$$

$$f^{-1}og(x)=\frac{\frac{mx}{x+2}}{\frac{mx}{x+2}-1}=\frac{mx}{mx-x-2}=\frac{mx}{(m-1)x-2}$$

اگر $m-1=0$ باشد، آن‌گاه نمودار $f^{-1}og$ خطی است. پس $m=1$ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

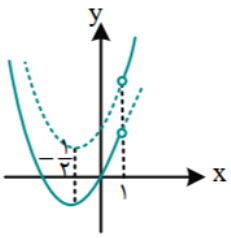
۶۹

$$f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}+\frac{|x-1|}{x-1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}+\frac{|x-1|}{x-1}$$

$$f(x)=\begin{cases}x^2+x+2 & x>1\\ x^2+x & x<1\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است و واضح است که کمترین مقدار تابع به ازای $x=-\frac{1}{2}$ به دست می‌آید که برابر است با:

$$f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$$



(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۰ ابتدا دامنهٔ توابع f و g را معلوم می‌کنیم:

$$\begin{cases}x-2\geq 0\Rightarrow x\geq 2\\ \text{و}\\ \sqrt{x-2}-1\neq 0\Rightarrow x-2\neq 1\Rightarrow x\neq 3\end{cases}\Rightarrow D_f=[2,+\infty)-\{3\}$$

$$4-x^2\geq 0\Rightarrow x^2\leq 4\Rightarrow -2\leq x\leq 2\Rightarrow D_g=[-2,2]$$

بنابراین دامنهٔ تابع gof به صورت زیر است:

$$D_{gof}=\{x|x\in D_f, f(x)\in D_g\}=\left\{x|x\geq 2, x\neq 3, -2\leq \frac{1}{\sqrt{x-2}-1}-1\leq 2\right\}$$

از طرف دیگر

$$-2\leq \frac{1}{\sqrt{x-2}-1}-1\leq 2\Rightarrow -1\leq \frac{1}{\sqrt{x-2}-1}\leq 3$$

$$\begin{cases}\sqrt{x-2}-1\leq -1\Rightarrow \sqrt{x-2}\leq 0\Rightarrow x=2\\ \text{یا}\\ \sqrt{x-2}-1\geq \frac{1}{3}\Rightarrow \sqrt{x-2}\geq \frac{4}{3}\Rightarrow x-2\geq \frac{16}{9}\Rightarrow x\geq \frac{34}{9}\end{cases}$$

بنابراین:

$$D_{gof}=[\frac{34}{9},+\infty)\cup\{2\}$$

پس $x=1$ و $x=3$ اعداد طبیعی‌ای هستند که در دامنهٔ تابع gof قرار ندارند.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۱ اگر نمودار تابع f^{-1} را یک واحد به چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f^{-1}(x+1)$ به دست می‌آید و اگر این نمودار به دست آمده را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $g(x)=-f^{-1}(x+1)$ به دست می‌آید. چون نمودار تابع g نیمساز ربع سوم را در نقطه‌ای به طول ۲- قطع می‌کند، پس $g(-2)=-2$

بنابراین:

$$-f^{-1}(-2+1)=-2\Rightarrow f^{-1}(-1)=2\Rightarrow f(2)=-1$$

$$\Rightarrow\sqrt{2-\frac{2}{2}}+\sqrt{2+\frac{k}{2}}-4=-1\Rightarrow\sqrt{2+\frac{k}{2}}=2\Rightarrow 2+\frac{k}{2}=4\Rightarrow\frac{k}{2}=2\Rightarrow k=4$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۲ اگر تابع خطی بر وارون خود منطبق باشد، یا همانی است و یا شیب آن برابر ۱- است.

$$f(x)=-x+b$$

می‌دانیم: $f(x)=f^{-1}(x)$

بنابراین:

$$fofof(x)=f(\underbrace{fof^{-1}(x)}_{x})=f(x)=-x+b=ax+3$$

در نتیجه: $b=3$

خواهیم داشت:

$$f^{-1}(2)=f(2)=-2+3=1$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۳ تابع $f(x)=a-6x-x^3$ اکیداً نزولی است. بنابراین:

$$fof(-x)\le f(x^3)\Rightarrow f(-x)\ge x^3\Rightarrow a+6x+x^3\ge x^3\Rightarrow x\ge-\frac{a}{6}$$

خواهیم داشت:

$$-\frac{a}{6}=\frac{1}{2}\Rightarrow a=-3$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۴ معادله را ساده می‌کنیم:

$$(x-2)(x+5)=\sqrt{(x+1)(x+2)}\Rightarrow x^2+3x-10=\sqrt{x^2+3x+2}$$

با فرض $x^2+3x+2=k$ داریم:

$$k-12=\sqrt{k}\Rightarrow k-\sqrt{k}-12=0\Rightarrow(\underbrace{\sqrt{k}+3}_{+})(\sqrt{k}-4)=0$$

$$\Rightarrow\sqrt{k}=4\Rightarrow k=16\Rightarrow x^2+3x+2=16\Rightarrow x^2+3x-14=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}S=-3\\P=-14\end{cases}\Rightarrow S-P=11$$

تذکر: دقت شود که جواب‌های معادله باید در دامنه صدق کنند که این اتفاق می‌افتد!

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۵ راه‌حل اول:

نکته: معادلهٔ خطی که از دو نقطهٔ (x_1,y_1) و (x_2,y_2) می‌گذرد، عبارت است از:

$$y-y_1=\underbrace{\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}_{\text{شیب خط}}(x-x_1)$$

با استفاده از نکته، معادلهٔ خطی را که از دو نقطهٔ $(2,5)$ و $(-1,-1)$ می‌گذرد، می‌نویسیم:

$$\text{شیب}: m=\frac{5-(-1)}{2-(-1)}=\frac{6}{3}=2 \Rightarrow y-5=2(x-2) \Rightarrow y=2x+1$$

محل تقاطع خط با محور طول‌ها، نقطه‌ای است که مقدار y آن برابر صفر است، پس:

$$y=0 \Rightarrow 0=2x+1 \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

راه‌حل دوم:

نکته: هر تابع خطی به‌فرم $y=ax+b$ است که در آن a و b اعداد حقیقی هستند.

با توجه به نکته، معادلهٔ خط را به‌صورت $f(x)=ax+b$ در نظر می‌گیریم. طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} f(2)=5 \Rightarrow 5=2a+b \\ f(-1)=-1 \Rightarrow -1=-a+b \end{cases} \xrightarrow{-} \overline{6=3a \Rightarrow a=2 \Rightarrow b=1}$$

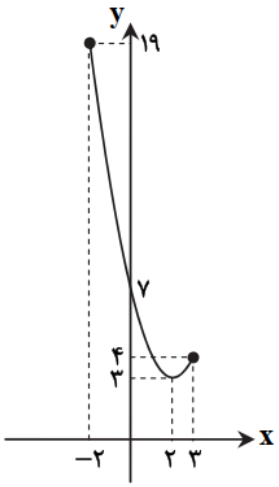
پس معادلهٔ خط به‌صورت $y=2x+1$ می‌باشد. ادامهٔ راه‌حل مشابه است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۶ نکته: با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$، می‌توان نمودار تابع $f(x)+k$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به‌اندازهٔ k واحد در امتداد محور yها به‌دست آورد. اگر $k>0$، انتقال در جهت مثبت و اگر $k<0$، انتقال در جهت منفی خواهد بود.

نکته: برای رسم نمودار $f(x+k)$ کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در امتداد محور xها انتقال دهیم. اگر $k>0$، انتقال در جهت منفی و اگر $k<0$، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

ابتدا نمودار تابع $y=(x-2)^2+3$ را در محدودهٔ $[-2,3]$ رسم می‌کنیم. برای این کار کافی است نمودار سهمی $y=x^2$ را ۲ واحد به راست و ۳ واحد به بالا منتقل کنیم. با توجه به نمودار رسم شده برد تابع بازهٔ $[3,19]$ می‌باشد.



(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۷ نکته: برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون f در معادلهٔ $y=f(x)$، مقدار x را برحسب y به‌دست می‌آوریم، سپس x و y را جابه‌جا می‌کنیم.

ابتدا با استفاده از نکتهٔ بالا، ضابطهٔ وارون تابع $y=3x-a$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y=3x-a \Rightarrow 3x=y+a \Rightarrow x=\frac{y+a}{3} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+a}{3}$$

طبق فرض، ضابطهٔ وارون تابع f به‌صورت $f^{-1}(x)=\frac{x-1}{b}$ است. از مقایسهٔ این دو عبارت نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{x+a}{3}=\frac{x-1}{b} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow a+b=2$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۸ نکته: اگر k یک عدد صحیح باشد، داریم: $[x]=k \Leftrightarrow k \le x < k+1$

نکته: اگر k یک عدد صحیح باشد، داریم: $[x+k]=[x]+k$

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$[x+2[x]]=6 \Rightarrow [x]+2[x]=6 \Rightarrow 3[x]=6 \Rightarrow [x]=2$$

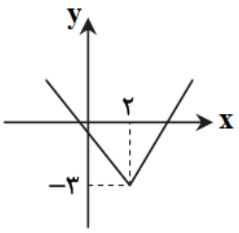
(عدد صحیح است)

$$\Rightarrow 2 \le x < 3 \Rightarrow 3 \le 1+x < 4 \Rightarrow \frac{3}{2} \le \frac{1+x}{2} < 2 \Rightarrow \left[\frac{1+x}{2}\right]=1$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۹ نکته: نمودار تابع $f(x)+k$ با انتقال نمودار تابع $f(x)$ به اندازهٔ k واحد در امتداد محور yها به‌دست می‌آید. اگر $k>0$ انتقال در جهت مثبت و اگر $k<0$ انتقال در جهت منفی خواهد بود.

با توجه به نکته، نمودار تابع f با برد $[-3,+\infty)$ به‌صورت روبه‌رو است.



بنابراین تابع به اندازهٔ ۳ واحد به‌سمت پایین انتقال داده شده و $a=-3$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۰ نکته: هر تابع را که بتوان آن را به‌شکل $y=ax+b$ نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود.

نکته: اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو از دامنهٔ تابع دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، تابع را همانی می‌نامند و آن را به‌صورت $y=x$ نشان می‌دهند.

مطابق صورت سؤال این تابع خطی از نقاط $(-8,3)$ و $(-4,-1)$ می‌گذرد، پس ضابطهٔ آن را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=ax+b \Rightarrow \begin{cases} f(-8)=3 \\ f(-4)=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8a+b=3 \\ -4a+b=-1 \end{cases} \Rightarrow a=-1, b=-5 \Rightarrow y=-x-5$$

$$-x-5=x \Rightarrow 2x=-5 \Rightarrow x=-\frac{5}{2} \Rightarrow \alpha=-\frac{5}{2} \Rightarrow \beta=-\frac{5}{2}$$

بنابراین:

$$\alpha+\beta=-5$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۱ ابتدا نمودار تابع y را رسم می‌کنیم و سپس نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم:



ضابطهٔ این تابع به‌صورت $y=-(x-2)^2-3$ می‌باشد.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۲ نکته: فرم کلی هر تابع خطی به‌صورت $y = ax + b$ است.

با توجه به نکته، فرض می‌کنیم $f(x) = ax + b$. پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} f(۲) + f(۱) = ۳ \Rightarrow ۲a + b + a + b = ۳ \Rightarrow ۳a + ۲b = ۳ \\ f(-۱) + f(۳) = ۴ \Rightarrow -a + b + ۳a + b = ۴ \Rightarrow ۲a + ۲b = ۴ \end{cases}$$

با حل دستگاه داریم:

$$\begin{cases} ۳a + ۲b = ۳ \\ ۲a + ۲b = ۴ \end{cases}$$

$$a = -۱ \Rightarrow b = ۳ \Rightarrow f(x) = ۳ - x$$

بنابراین:

$$f(-۲) = ۵$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۳ نکته: اگر برد یک تابع فقط شامل یک عضو باشد، آن تابع را ثابت گوییم.

نکته: اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشد و هر عضو دامنه به همان عضو در برد تابع نسبت داده شود، یا به‌عبارت دیگر برای تمام اعضای دامنه $y = x$ باشد، آن تابع را همانی می‌گوییم.

چون f تابعی ثابت است، پس تمام مؤلفه‌های دوم با هم برابر هستند: $a + b = ۴ \quad , \quad c = ۴$

چون g تابعی همانی است، پس مقادیر x و y در هر زوج‌مرتب برابر است: $a - b = ۲ \quad , \quad ۲c = d + b$

$$\begin{cases} a + b = ۴ \\ a - b = ۲ \end{cases} \Rightarrow ۲a = ۶ \Rightarrow a = ۳ \Rightarrow b = ۱$$

بنابراین: $۲c = d + b \xrightarrow[b=۱]{c=۴} d = ۷$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۴ با توجه به اینکه، ضلع AC بر AB عمود است، طبق فرمول مساحت مثلث، داریم:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{۱}{۲} \times AB \times AC \Rightarrow ۶ = \frac{۱}{۲} \times x \times AC \Rightarrow x \times AC = ۱۲ \Rightarrow AC = \frac{۱۲}{x}$$

اکنون طبق قضیهٔ فیثاغورس، داریم:

$$BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ \Rightarrow BC^۲ = (\frac{۱۲}{x})^۲ + x^۲ \Rightarrow BC^۲ = \frac{۱۴۴}{x^۲} + x^۲ \Rightarrow BC = \sqrt{\frac{۱۴۴}{x^۲} + x^۲}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۵ به‌کمک دامنه، برد تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f(-۱) = f(۵) = ۵ \\ f(۰) = f(۴) = ۰ \\ f(۱) = f(۳) = -۳ \\ f(۲) = -۴ \end{cases} \Rightarrow R_f = \{۰ , -۳ , -۴ , ۵\}$$

بنابراین برد تابع ۴ عضوی است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۶ نکته: به‌ازای هر عدد صحیح k داریم: $[x+k]=[x]+k$

نکته: اگر k و $k+1$ دو عدد صحیح متوالی باشند، داریم: $[x]=k \Leftrightarrow k \le x < k+1$

با استفاده از نکات بالا داریم:

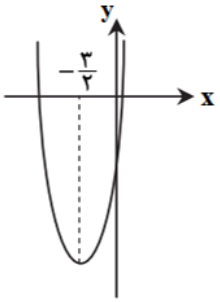
$$[2x]-3+[2x]+[2x]+1=4 \Rightarrow 3[2x]=6 \Rightarrow [2x]=2 \Rightarrow 2 \le 2x < 3 \Rightarrow 1 \le x < \frac{3}{2} \Rightarrow x \in \left[1, \frac{3}{2}\right)$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۷ نکته: سهمی $y=ax^2+bx+c$ در $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک نیست؛ ولی با محدود کردن دامنهٔ آن به بازه‌های $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ یا $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ (یا زیرمجموعه‌ای از هریک از این دو بازه)، می‌توان تابع یک‌به‌یک ساخت. دقت کنید که $x=-\frac{b}{2a}$ طول رأس سهمی است.

ابتدا طول رأس سهمی $f(x)=2x^2+6x-3$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x=-\frac{6}{2(2)}=-\frac{3}{2}$$



با توجه به نکتهٔ بالا، با محدود کردن دامنهٔ سهمی به بازه‌های $\left[-\frac{3}{2}, +\infty\right)$ یا $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$ می‌توان تابع یک‌به‌یک ساخت.

پس بیشترین مقدار α برابر با $-\frac{3}{2}$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۸ نکته: دو تابع f و g را برابر می‌نامیم، هرگاه:

الف) دامنهٔ f و دامنهٔ g برابر باشند.

ب) به‌ازای هر x از این دامنهٔ مشترک داشته باشیم: $f(x)=g(x)$

دامنهٔ g برابر $\mathbb{R}$ است. چون f و g برابرند، پس باید دامنهٔ f برابر $\mathbb{R}$ باشد. ضابطهٔ اول تابع f فقط به‌ازای $x=-3$ (ریشهٔ مخرج) تعریف نمی‌شود.

پس $a=-3$ و داریم:

$$b=f(-3) \overset{f \text{ و } g \text{ برابرند}}{=\!=} g(-3)=-3-3=-6$$

بنابراین:

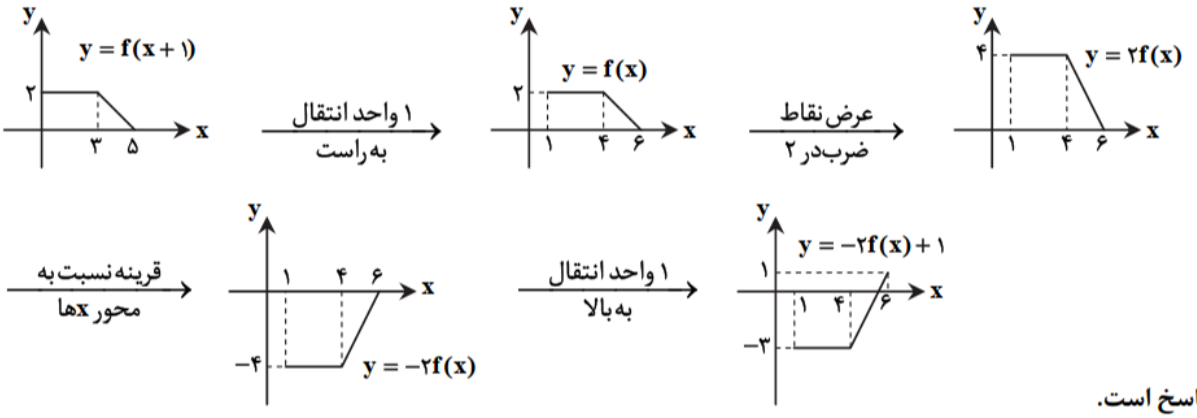
$$b-a=-6+3=-3$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۹ نکته: اگر k عددی مثبت باشد، برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$، کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ را k برابر کنیم.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y=-f(x)$، کافی است قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور xها رسم کنیم.

با استفاده از نکات بالا داریم:



بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۰

$$\text{نکته: } (\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \quad ; \quad D_{\frac{f}{g}}=D_f \cap D_g-\{x \mid g(x)=0\}$$

ابتدا داریم:

$$D_f=D_g=\{1,3,5\} \Rightarrow D_{\frac{f}{g}}=D_f \cap D_g-\{x \mid g(x)=0\}=\{1,3,5\}-\{5\}=\{1,3\}$$

بنابراین:

$$\frac{f}{g}=\left\{(1,\frac{f(1)}{g(1)}),(3,\frac{f(3)}{g(3)})\right\}=\left\{(1,\frac{2}{5}),(3,2)\right\}$$

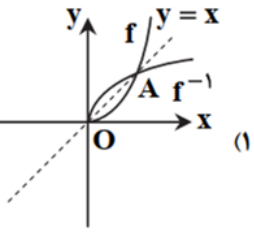
پس گزینهٔ ۲ پاسخ است.

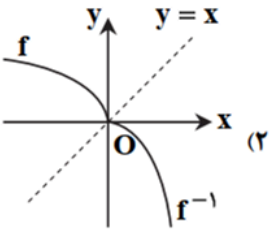
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

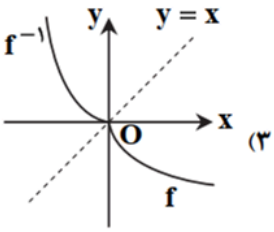
۹۱

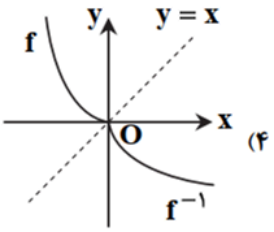
نکته: برای رسم نمودار وارون یک تابع، کافی است نمودار آن را نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ناحیهٔ اول و سوم) قرینه کنیم.

معکوس هر ۴ تابع را رسم می‌کنیم.

۱)


۲)


۳)


۴)


نمودار تابع گزینهٔ ۱ معکوس خود را در نقاط O و A قطع می‌کند. پس گزینهٔ ۱ درست است؛ زیرا سایر گزینه‌ها نمودار f^{-1} را فقط یک بار در مبدأ مختصات قطع کرده‌اند.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

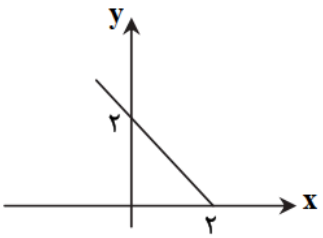
۹۲

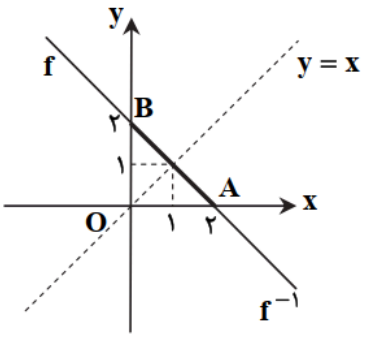
نکته: برای رسم نمودار تابع وارون یک تابع وارون‌پذیر، نمودار آن را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم یعنی خط $y=x$ قرینه می‌کنیم.

برای $x \leq 2$، عبارت $x-2$ نامثبت است و داریم:

$$f(x)=|x-2| \xrightarrow{x \leq 2} f(x)=-x+2$$

نمودار تابع و تابع وارون به‌صورت زیر است:



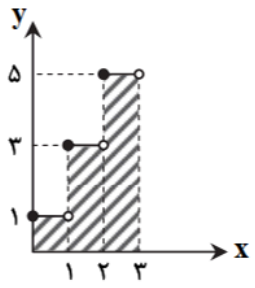


طول قسمتی که تابع و تابع وارون بر هم منطبق‌اند، وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین با ساق‌های ۲ است، پس داریم:

$$\overset{\triangle}{OAB}: AB^2=2^2+2^2=8 \Rightarrow AB=2\sqrt{2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۳ ابتدا نمودار تابع $g(x)=۲[x]+۱$ را در بازهٔ $[۰,۳)$ رسم می‌کنیم:



$$۰\le x<۱ \Rightarrow [x]=۰ \Rightarrow g(x)=۲(۰)+۱=۱$$
$$۱\le x<۲ \Rightarrow [x]=۱ \Rightarrow g(x)=۲(۱)+۱=۳$$
$$۲\le x<۳ \Rightarrow [x]=۲ \Rightarrow g(x)=۲(۲)+۱=۵$$

با توجه به شکل، مساحت محدود به نمودار تابع $g(x)$ و محور xها در بازهٔ $[۰,۳)$ برابر است با:

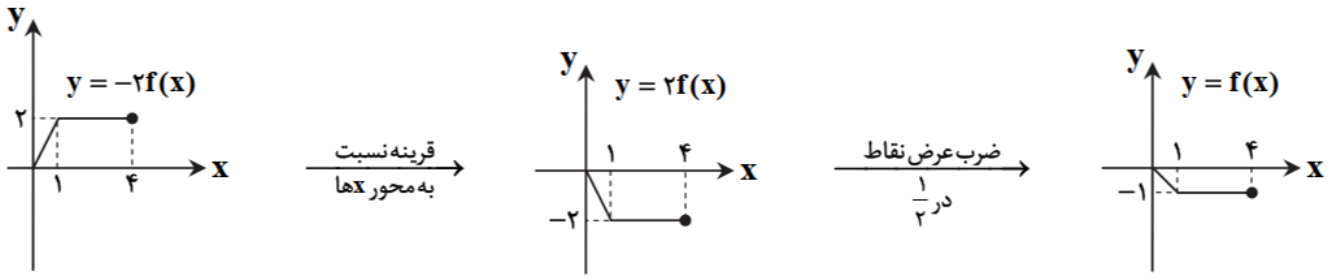
$$۱\times ۱+۱\times ۳+۱\times ۵=۹$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۴ نکته: با فرض $k>۰$، برای رسم نمودار $y=kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه روی نمودار تابع $y=f(x)$ را k برابر کنیم.

نکته: برای رسم نمودار $y=-f(x)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم.

با استفاده از نکات بالا، داریم:



بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۵ با توجه به نمودار، دامنهٔ تابع بازهٔ $[-۴,+\infty)$ است، پس داریم:

$$x+a\ge ۰ \Rightarrow x\ge -a \Rightarrow -a=-۴ \Rightarrow a=۴ \Rightarrow f(x)=-\sqrt{x+۴}-b$$

نمودار تابع از نقطهٔ $(-۴,۱)$ می‌گذرد، بنابراین داریم:

$$f(-۴)=۱ \Rightarrow -b=۱ \Rightarrow b=-۱ \Rightarrow f(x)=-\sqrt{x+۴}+۱$$

حال محل برخورد تابع با محورهای مختصات را می‌یابیم:

$$x=۰ \Rightarrow f(۰)=-\sqrt{۴}+۱=-۱ \Rightarrow d=-۱$$
$$f(x)=۰ \Rightarrow -\sqrt{x+۴}+۱=۰ \Rightarrow \sqrt{x+۴}=۱ \Rightarrow x+۴=۱ \Rightarrow x=-۳ \Rightarrow c=-۳$$
$$ac+bd=۴(-۳)+(-۱)(-۱)=-۱۲+۱=-۱۱$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۶ نکته: مجموعه‌ای از زوج‌مرتب‌ها، زمانی تابع است که هیچ دو زوج‌مرتب متمایزی دارای مؤلفهٔ اول یکسان نباشند؛ یعنی در یک تابع اگر دو زوج‌مرتب دارای مؤلفهٔ اول یکسان باشند، باید مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز برابر باشند.

$$\begin{cases}(۱,۲-m)\in f\\(۱,m^۲)\in f\end{cases} \Rightarrow ۲-m=m^۲ \Rightarrow m^۲+m-۲=۰ \Rightarrow (m-۱)(m+۲)=۰ \Rightarrow m=۱,-۲ \quad (*)$$

$$\begin{cases}(۲,-۱)\in f\\(۲,m+۱)\in f\end{cases} \Rightarrow -۱=m+۱ \Rightarrow m=-۲ \quad (**)$$

از اشتراک $(*)$ و $(**)$ نتیجه می‌گیریم $m=-۲$، پس:

$$f=\{(۱,۴),(۲,-۱),(۰,۳)\} \Rightarrow f(۰)=۳$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۷ نکته: هر تابع که بتوان آن را به‌شکل $y = ax + b$ نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود که در آن مقدار a شیب خط و مقدار b عرض از مبدأ خط است.

با توجه به شکل، وقتی $x \le 1$، ضابطهٔ تابع خطی است که از نقاط $(0,2)$ و $(-3,0)$ می‌گذرد، بنابراین: شیب $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-2}{-3-0} = \frac{2}{3}$

چون عرض از مبدأ آن $y = 2$ است، معادله به‌صورت $y = \frac{2}{3}x + 2$ و مقدار $a = \frac{2}{3}$ است و داریم: $f(1) = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$

ضابطهٔ دوم تابع ثابت $y = b$ در بازهٔ $1 < x < c$ است، پس مقدار b برابر $\frac{8}{3}$ است، زیرا نقطهٔ $(1,\frac{8}{3})$ محل برخورد ضابطهٔ اول و دوم است.

در ضابطهٔ سوم $x \ge c$ و در این نقطه تابع با محور xها برخورد کرده است، بنابراین $f(c) = 0$. در نتیجه:

$$-x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow c = 3$$

پس مقدار $a = \frac{2}{3}$، $b = \frac{8}{3}$، $c = 3$ و مقدار $bc = 8$ است.

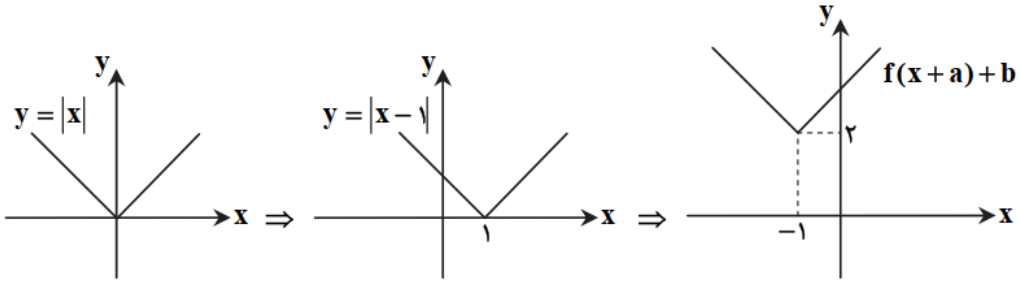
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۸ نکته: با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$ نمودار تابع $f(x)+k$ با انتقال نمودار $f(x)$ به‌اندازهٔ k واحد در امتداد محور yها به‌دست می‌آید.

اگر $k > 0$، انتقال در جهت مثبت و اگر $k < 0$، انتقال در جهت منفی خواهد بود.

نکته: برای رسم نمودار $f(x+k)$ کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در امتداد محور xها انتقال دهیم. اگر $k > 0$، انتقال در جهت منفی و اگر $k < 0$، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

مسئله را به‌کمک رسم مرحله به مرحله، حل می‌نماییم:



با توجه به نکات، $a = b = 2$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۹ نکته: دامنهٔ تقسیم دو تابع به‌صورت روبه‌رو تعریف می‌شود:

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

با توجه به نکتهٔ بالا، ابتدا دامنهٔ توابع f و g را می‌یابیم:

$$f(x) = \sqrt{5-x} \Rightarrow 5 - x \ge 0 \Rightarrow x \le 5 \Rightarrow D_f = (-\infty, 5]$$

g با توجه به نمودار $\Rightarrow D_g = (-4, +\infty)$

$$D_f \cap D_g = (-\infty, 5] \cap (-4, +\infty) = (-4, 5]$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow x = -2, 3, 5 \Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{-2,3,5\} \Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = (-4,5] - \{-2,3,5\} = (-4,5) - \{-2,3\}$$

$\frac{f}{g}$ اعداد صحیح دامنهٔ $= \{-3, -1, 0, 1, 2, 4\} \Rightarrow$ مجموع این اعداد صحیح $= -3 - 1 + 0 + 1 + 2 + 4 = 3$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۰ نکتهٔ ۱: هر تابع که بتوان آن را به‌شکل $y = ax + b$ نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود.

نکتهٔ ۲: با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$، می‌توان نمودار تابع $f(x)+k$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازهٔ k واحد در امتداد محور yها به‌دست آورد. اگر $k > 0$ باشد، انتقال در جهت مثبت و اگر $k < 0$ باشد، انتقال در جهت منفی خواهد بود.

نکتهٔ ۳: برای رسم نمودار تابع $f(x+k)$ کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در امتداد محور xها انتقال دهیم. اگر $k > 0$ باشد، انتقال در جهت منفی و اگر $k < 0$ باشد، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

ابتدا ضابطهٔ توابع f و g را به‌دست می‌آوریم.

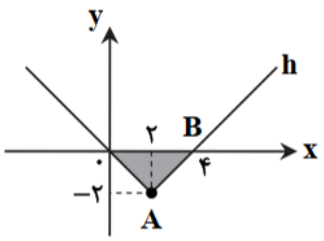
$$\left.\begin{matrix}(۲,۰)\in f\\(۰,۴)\in f\end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{شیب} = a = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۴-۰}{۰-۲} = -۲ \Rightarrow f(x) = -۲x + b \xrightarrow{f(۰)=۴} f(x) = -۲x + ۴$$

نمودار g بر نمودار f عمود است. بنابراین شیب آن معکوس و قرینهٔ شیب f است و از طرفی $g(۰) = ۰$، پس: $g(x) = \frac{۱}{۲}x$.

اکنون ضابطهٔ $h(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$h(x) = \left|-۲x+۴\right| - ۲\left|\frac{۱}{۲}x - ۱\right| - ۲ = ۲\left|-x+۲\right| - \left|x-۲\right| - ۲ = \left|x-۲\right| - ۲$$

نمودار تابع $y = |x|$ را دو واحد به‌سمت راست و دو واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار $h(x)$ به‌دست آید:

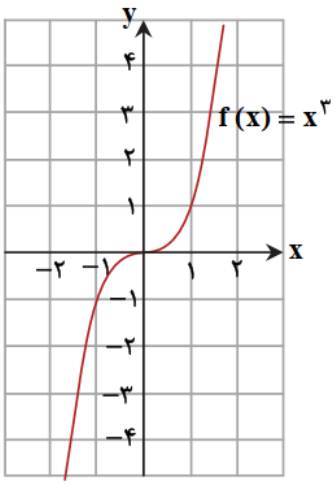


مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $h(x)$ و محور xها برابر است با:

$$S = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۲ = ۴$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۱ نکتهٔ ۱: نمودار تابع درجهٔ سوم $y = x^3$ به‌صورت زیر است:



نکتهٔ ۲: با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$، می‌توان نمودار تابع $f(x)+k$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازهٔ k واحد در امتداد محور yها به‌دست آورد. اگر $k > 0$ باشد، انتقال در جهت مثبت و اگر $k < 0$ باشد، انتقال در جهت منفی خواهد بود.

نکتهٔ ۳: برای رسم نمودار تابع $f(x+k)$ کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در امتداد محور xها انتقال دهیم. اگر $k > 0$ باشد، انتقال در جهت منفی و اگر $k < 0$ باشد، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

اگر نمودار $y = x^3$ را یک واحد به راست و ۲ واحد به بالا انتقال دهیم به نمودار تابع $y = (x-1)^3 + 2$ می‌رسیم. از طرفی نمودار از مبدأ گذشته است، پس:

$$f(x) = k(x-1)^3 + 2 \quad , \quad f(0) = 0 \Rightarrow k = 2$$

$$f(x) = 2(x-1)^3 + 2 = 2(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 2$$

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x = 2x(x^2 - 3x + 3)$$

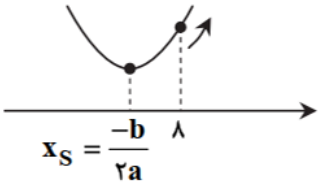
پس: $a = 2$ و $b = 0$ و $c = -3$، لذا:

$$ac = -6$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۲ اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از مجموعهٔ A $(A \subseteq D_f)$ که $x_1 < x_2$، داشته باشیم $f(x_1) < f(x_2)$، آنگاه f را تابعی اکیداً صعودی می‌نامیم.

نکته: در سهمی $y = ax^2 + bx + c$ اگر $a > 0$ باشد سهمی رویه بالا است و تابع به‌ازای $x \geq \frac{-b}{2a}$ اکیداً صعودی است:



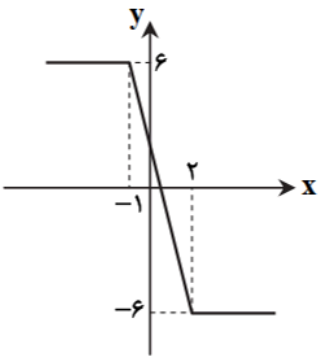
$$x_S = \frac{-(-b)}{2\times 2} = \frac{b}{4} \leq 8 \Rightarrow b \leq 32 \Rightarrow$$ حداکثر مقدار b، ۳۲ است.

اکنون داریم:

$$f(x) = \left|2x - \frac{b}{8}\right| - \left|\frac{b}{16}x + 2\right| = \left|2x - \frac{32}{8}\right| - \left|\frac{32}{16}x + 2\right| = |2x-4| - |2x+2|$$

$$f(x) = \begin{cases} 6 & x < -1 \\ -4x + 2 & -1 \leq x < 2 \\ -6 & x \geq 2 \end{cases}$$

با رسم تابع $f(x)$ مشاهده می‌شود، این تابع در بازهٔ $[-1, 2]$ اکیداً نزولی است.



(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

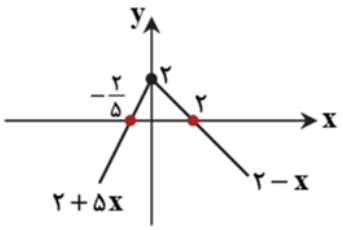
۱۰۳ نکته: به تابعی که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، تابع اکیداً یکنوا گوییم.

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ ۱: تابع اکیداً یکنوا محور xها را حداکثر یک بار قطع می‌کند. معادلهٔ $x\sqrt{x+2}=0$، دارای دو ریشهٔ $x=0,-2$ است. پس تابع اکیداً یکنوا نیست.

گزینهٔ ۲: با تعیین علامت x داریم:

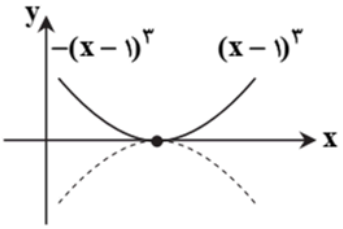
$$y=\begin{cases}2+2x-3x=2-x & x\geq 0\\ 2+2x+3x=2+5x & x<0\end{cases}$$



مشاهده می‌کنیم که این تابع اکیداً یکنوا نیست.

گزینهٔ ۳: با تعیین علامت $x-1$، داریم:

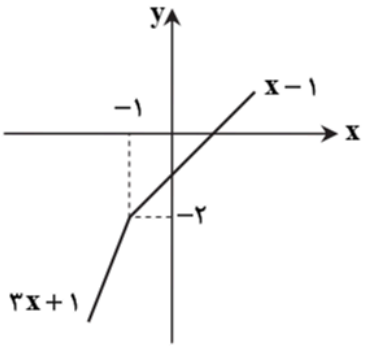
$$y=\begin{cases}(x-1)(x-1)^2=(x-1)^3 & x\geq 1\\ -(x-1)(x-1)^2=-(x-1)^3 & x<1\end{cases}$$



مشاهده می‌کنیم که این تابع اکیداً یکنوا نیست.

گزینهٔ ۴: با تعیین علامت $x+1$ داریم:

$$y=\begin{cases}2x+x+1=3x+1 & x<-1\\ 2x-x-1=x-1 & x\geq -1\end{cases}$$



مشاهده می‌کنیم این تابع اکیداً صعودی است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۴ نکته: اگر تابع f اکیداً یکنوا باشد، آنگاه: $(x_1,x_2\in D_f)$

$$f(x_1)\leq f(x_2)\Rightarrow\begin{cases}x_1\leq x_2 & :\text{اکیداً صعودی باشد } f\\ x_1\geq x_2 & :\text{اکیداً نزولی باشد } f\end{cases}$$

توابع $y=3^{x+1}$ و $y=2x$ هر دو صعودی اکید هستند، پس جمع آن‌ها یعنی $y=f(x)$ تابعی صعودی اکید با دامنهٔ $\mathbb{R}$ است و داریم:

$$fof(x)\leq f(9+2x)\Rightarrow f(x)\leq 2x+9\Rightarrow 2x+3^{1+x}\leq 2x+9\Rightarrow 3^{x+1}\leq 9\Rightarrow x+1\leq 2\Rightarrow x\leq 1$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۵ نکتهٔ ۱: مجموع دو تابع اکیداً صعودی، اکیداً صعودی است.

نکتهٔ ۲: اگر f و g هر دو اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشند، توابع fog و gof اکیداً صعودی هستند.

نکتهٔ ۳: اگر f اکیداً صعودی و g اکیداً نزولی باشند، توابع fog و gof اکیداً نزولی هستند.

چون $f+g$ و $f-g$ اکیداً صعودی هستند، مجموع آن‌ها اکیداً صعودی است لذا $۲f$ اکیداً صعودی و در نتیجه f اکیداً صعودی است، پس تابع $y=fof$ هم اکیداً صعودی است، سایر گزینه‌ها می‌تواند مثال نقض داشته باشد.

مثال نقض سایر گزینه‌ها: با فرض $g(x)=۰$ و $f(x)=x$ داریم:

$$y_۱=f+g=x \ , \ y_۲=f-g=x$$

گزینهٔ ۲: $gog=g(g(x))=۰ \rightarrow$ ثابت

گزینهٔ ۳: $f^۲-g^۲=x^۲ \rightarrow$ غیریکنوا

گزینهٔ ۴: $f\times g=۰ \rightarrow$ ثابت

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۶ نکته (دامنهٔ تابع مرکب): دامنهٔ تابع مرکب gof مجموعه xهایی است که هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کنند:

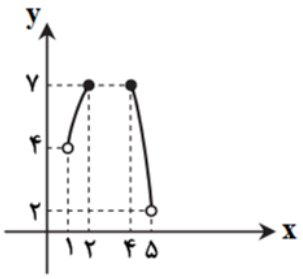
۱) x در دامنهٔ f قرار داشته باشد.

۲) $f(x)$ در دامنهٔ g قرار داشته باشد.

با توجه به شکل می‌توان گفت:

$$D_f=(۱,۵) \ , \ D_g=(۲,۷] \qquad D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\} \qquad D_{gof}=\{\underbrace{x\in(۱,۵)}_{(۱)} \mid f(x)\in(۲,۷]\}$$

حالا باید نامعادلهٔ $۲<f(x)\le ۷$ را حل کنیم، با توجه به نمودار f داریم:



$$۲<f(x)\le ۷ \Rightarrow ۱<x\le ۲ \text{ یا } ۴\le x<۵ \quad (۲)$$

$$(۱)\cap(۲) \Rightarrow D_{gof}=(۱,۲]\cup[۴,۵)=(۱,۵)-(۲,۴)$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۷ نکتهٔ ۱: تابع صعودی: اگر برای هر دو نقطهٔ $x_۱$ و $x_۲$ از مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ که $x_۱<x_۲$، داشته باشیم $f(x_۱)\le f(x_۲)$، آنگاه f را تابعی صعودی می‌نامیم.

نکتهٔ ۲: هر تابع که بتوان آن را به‌شکل $y=ax+b$ نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود.

ضابطهٔ $f(x)$ را به‌صورت $f(x)=ax+b$ در نظر می‌گیریم:

$$f(f(x))=a(ax+b)+b=a^۲x+ab+b=۴x+۲۱ \quad (۱)$$

$$\Rightarrow a^۲=۴ \xrightarrow{f\text{صعودی است.}} a=۲ \xrightarrow{(۱)} ۴x+۲b+b=۴x+۲۱$$

$$\Rightarrow ۳b=۲۱ \Rightarrow b=۷ \Rightarrow f(x)=۲x+۷ \Rightarrow g(x)=f(\frac{۱}{x})=\frac{۲}{x}+۷$$

حالا معادله را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x))=\frac{۲}{f(x)}+۷=۵ \Rightarrow \frac{۲}{۲x+۷}=-۲ \Rightarrow ۲x+۷=-۱ \Rightarrow x=-۴$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۸ راه‌حل اول:

نکته : $(fog)(x)=f(g(x))$

در ابتدا $f(x)=۶$ را حل می‌کنیم و x را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=۶ \Rightarrow \frac{۳x}{x+۱}=۶ \Rightarrow ۳x=۶x+۶ \Rightarrow x=-۲$$

به این ترتیب در تساوی $fo\frac{۱}{f}=gof$ قرار می‌دهیم:

$x=-۲$

$$fo\frac{۱}{f(-۲)}=gof(-۲) \Rightarrow f(\frac{۱}{۶})=g(۶)$$

کافی است $f(\frac{۱}{۶})$ را به‌دست آوریم:

$$f(\frac{۱}{۶})=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۶}+۱}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۷}{۶}}=\frac{۳}{۷} \Rightarrow g(۶)=\frac{۳}{۷}$$

راه‌حل دوم:

می‌توانستیم در همان ابتدا به‌جای $f(x)$ عدد ۶ را قرار دهیم:

$$f(\frac{۱}{f(x)})=g(f(x)) \Rightarrow f(\frac{۱}{۶})=g(۶) \Rightarrow \frac{۳}{۷}=g(۶)$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۹

نکته : $(fog)(x)=f(g(x))$

بنابراین داریم: $(۳,۱)\in fog$،

از طرفی $(۳,۰)\in gof$، پس:

$$(gof)(۳)=۰ \Rightarrow g(f(۳))=۰ \Rightarrow g(۴)=۰ \Rightarrow ۴\in D_g \Rightarrow b=۴ \ (۲) \xrightarrow{(۱),(۲)} (fof)(b)=(fof)(۴)=f(f(۴))=f(۱)=۰$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۰ نکته: هر تابع به‌شکل $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ را یک تابع گویا می‌نامیم که در آن $P(x)$ ، $Q(x)$ چندجمله‌ای هستند و چندجمله‌ای $Q(x)$ صفر نیست.

نکته: دو تابع f و g را برابر نامیم هرگاه:

الف) دامنهٔ f و دامنهٔ g با هم برابر باشند.

ب) برای هر x از این دامنهٔ یکسان داشته باشیم:

$$f(x)=g(x)$$

تابع g، تابعی گویا است؛ پس باید $a=m=۰$ باشد؛ بنابراین:

$$g(x)=\frac{\sqrt[۳]{b^۳x^۳}-۳x^۲}{۱+x}=\frac{bx-۳x^۲}{۱+x}\ ,\ D_g=\mathbb{R}-\{-۱\}$$

توابع f و g با هم برابر هستند؛ بنابراین:

$$۱)\ D_f=D_g\ \Rightarrow\ k=-۱$$

$$۲)\ f(x)=g(x)\ \Rightarrow\ \frac{bx-۳x^۲}{۱+x}=-۳x\ \Rightarrow\ bx-۳x^۲=-۳x-۳x^۲\ \Rightarrow\ b=-۳$$

با توجه به مقادیر به‌دست‌آمده داریم:

$$b-k+am=-۳+۱+۰=-۲$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۱ نکته: $[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$

ابتدا برد تابع g را به‌دست می‌آوریم:

$$g(x)=۳^{[x]+[-x]}\ \Rightarrow\ \begin{cases}x\in\mathbb{Z}\ \Rightarrow\ g(x)=۳^{۰}=۱\\ x\notin\mathbb{Z}\ \Rightarrow\ g(x)=۳^{-۱}=\frac{۱}{۳}\end{cases}\ \Rightarrow\ R_g=\left\{۱,\frac{۱}{۳}\right\}$$

اکنون دامنهٔ تابع f را به‌دست می‌آوریم، یعنی باید مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $-۳(x-a)^۲(x-b)^۲\geq ۰$ را به‌دست آوریم.

با توجه به اینکه $(x-a)^۲$ و $(x-b)^۲$ هر دو نامنفی هستند، نامعادلهٔ فوق زمانی برقرار است که داشته باشیم:

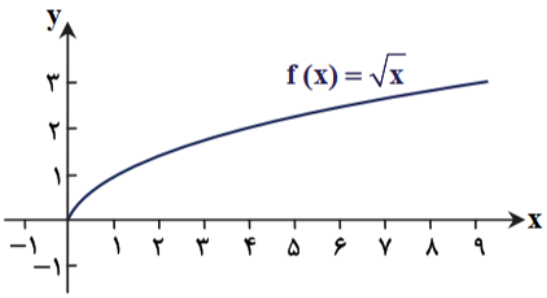
$$\begin{cases}x-a=۰\ \Rightarrow\ x=a\\ x-b=۰\ \Rightarrow\ x=b\end{cases}\xrightarrow{\cup}\ D_f=\{a,b\}$$

با توجه به فرض سؤال داریم:

$$D_f=R_g\ \Rightarrow\ \{a,b\}=\left\{۱,\frac{۱}{۳}\right\}\ \Rightarrow\ a+b=\frac{۴}{۳}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۲ نکته: نمودار تابع رادیکالی $f(x)=\sqrt{x}$ به‌صورت روبه‌رو است:



نکته: برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=-f(x)$ کافی است قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور طول‌ها رسم کنیم.

با توجه به نمودار داده‌شده داریم:

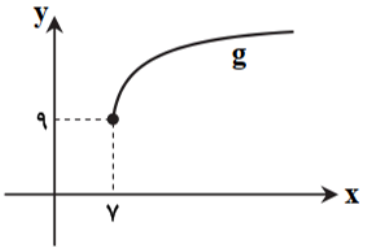
$$\begin{cases} f(۰)=-۳ \Rightarrow -\sqrt{b}=-۳ \Rightarrow b=۹ \\ f(-۲)=۰ \Rightarrow -\sqrt{-۲a+۹}=۰ \Rightarrow a=۴/۵ \end{cases} \Rightarrow f(x)=-\sqrt{۴/۵x+۹}$$

اکنون ضابطهٔ تابع $g(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$g(x)=۲a-f(x-b) \xrightarrow[b=۹]{a=۴/۵} g(x)=۹-f(x-۹) \Rightarrow g(x)=۹+\sqrt{۴/۵(x-۹)+۹}=۹+\sqrt{۴/۵x-۳۱/۵}$$

$$۴/۵x-۳۱/۵\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۷ \Rightarrow D_g=[۷,+\infty) \ , \ g(۷)=۹$$

بنابراین نمودار تابع $g(x)$ مانند گزینهٔ ۳ است.



(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۳ نکته: دربارهٔ تقسیم دو تابع f و g داریم:

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \qquad D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x \mid g(x)=۰\}$$

ابتدا دامنهٔ g را به‌دست می‌آوریم:

$$۴x-x^۲\geq ۰ \Rightarrow x(x-۴)\leq ۰ \xrightarrow[\text{علامت ضریب } x^۲]{\text{بین دو ریشه، مخالف}} ۰\leq x\leq ۴ \Rightarrow D_g=[۰,۴]$$

دامنهٔ f برابر است با:

$$D_f=\{۱,۲,۳,۵\}$$

بنابراین:

$$D_f\cap D_g=\{۱,۲,۳\}$$

با توجه به دامنهٔ تابع $\frac{f+g}{g-f}$، مشاهده می‌شود $x=۲$ در دامنهٔ این تابع قرار ندارد.

در حالی که $x=۲$ در $D_f\cap D_g$ وجود دارد. پس به‌ازای $x=۲$ مخرج این تابع صفر می‌شود و داریم:

$$(g-f)(۲)=۰ \Rightarrow g(۲)=f(۲) \xrightarrow{f(۲)=۱} \sqrt{۸-۴}+a=۱ \Rightarrow ۲+a=۱ \Rightarrow a=-۱$$

بنابراین $g(x)=\sqrt{۴x-x^۲}-۱$ است.

$$(\frac{f+g}{g-f})(۱)=-a \Rightarrow \frac{f(۱)+g(۱)}{g(۱)-f(۱)}=۱ \xrightarrow{f(۱)=b} \frac{b+\sqrt{۳}-۱}{\sqrt{۳}-۱-b}=۱ \Rightarrow b+\sqrt{۳}-۱=\sqrt{۳}-۱-b \Rightarrow ۲b=۰ \Rightarrow b=۰$$

از طرفی:

پس $۳a^۲-۲b^۲=۳$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۴ نکته: اگر $k \in \mathbb{Z}$، داریم: $k \le x < k+1 \Leftrightarrow [x] = k$

نکته: $D_{f^{-1}} = R_f \ , \ R_{f^{-1}} = D_f$

نکته: برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f، در معادلهٔ $y = f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x، $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

$$۴ < x < ۶ \Rightarrow ۲ < \frac{x}{۲} < ۳ \Rightarrow \left[\frac{x}{۲}\right] = ۲ \Rightarrow f(x) = \frac{x}{۴} - ۲$$

پس f یک تابع خطی با شیب مثبت است؛ بنابراین:

$$D_f = (۴,۶) \ , \ f(۴) = -۱ \ , \ f(۶) = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow R_f = (-۱,-\frac{۱}{۲})$$

از طرفی:

$$R_f = D_{f^{-1}} = D_g = (-۱,-\frac{۱}{۲}) \Rightarrow \alpha = -۱ \ , \ \beta = -\frac{۱}{۲} \quad (۱)$$

اکنون وارون f را به‌دست می‌آوریم:

$$y = \frac{x}{۴} - ۲ \Rightarrow y + ۲ = \frac{x}{۴} \Rightarrow x = ۴y + ۸ \Rightarrow f^{-1}(x) = ۴x + ۸ \xrightarrow{f^{-1}(x)=g(x)} g(x) = ۴x + ۸$$

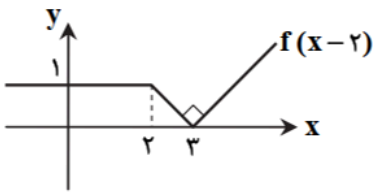
$$\xrightarrow{(۱)} g(x) = -۸\beta x - ۸\alpha = -۸(\beta x + \alpha)$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

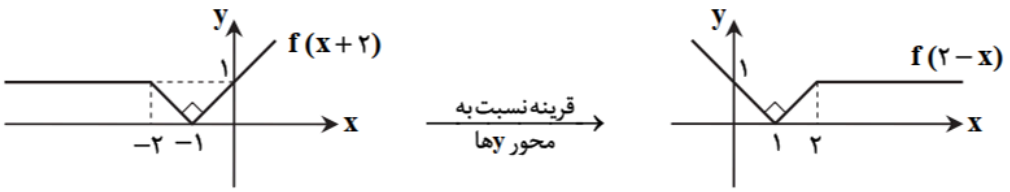
۱۱۵ نکته: برای رسم نمودار $y = f(-x)$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y = f(x+k)$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را $|k|$ واحد در امتداد محور طول‌ها انتقال دهیم. اگر $k > ۰$ باشد، انتقال در جهت منفی و اگر $k < ۰$ باشد، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

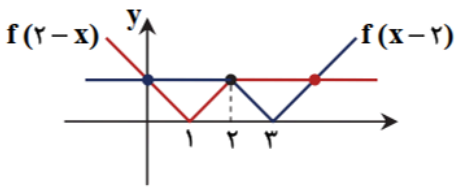
برای رسم نمودار $y = f(x-۲)$ از روی نمودار $f(x)$، کافی است نمودار f را دو واحد به‌سمت راست انتقال دهیم:



برای رسم نمودار $y = f(۲-x)$ از روی نمودار $f(x)$، ابتدا نمودار f را ۲ واحد به چپ انتقال می‌دهیم و سپس نمودار حاصل را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم:



با رسم دو نمودار در یک دستگاه، مشاهده می‌شود، توابع $y = f(x-۲)$ و $y = f(۲-x)$ در سه نقطه متقاطع هستند.



(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

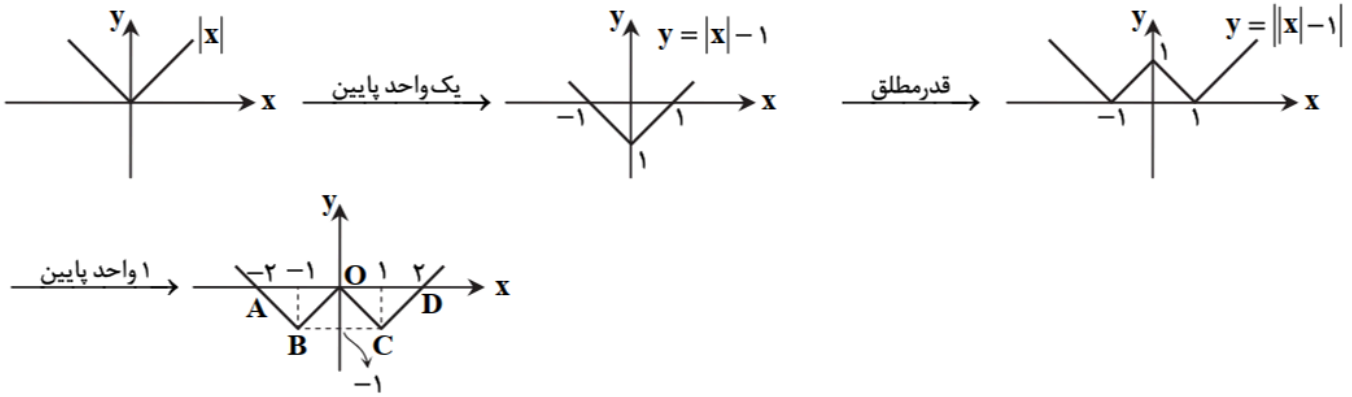
۱۱۶ نکته: برای رسم نمودار $y=|f(x)|$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را رسم کنیم و در قسمت‌هایی که نمودار f زیر محور طول‌ها است، قرینهٔ نمودار f را نسبت به محور طول‌ها رسم کنیم.

می‌دانیم تابع خطی $y=x$ و هر تابع خطی به‌صورت $y=-x+b$ نسبت به خط $y=x$ متقارن هستند، پس با وارون خود برابر هستند. یعنی:

$$f(x)=x \Rightarrow f(x)=f^{-1}(x)$$

$$f(x)=-x+b \Rightarrow f(x)=f^{-1}(x)$$

اکنون نمودار تابع $y=|x|-1$، سپس نمودار $y=||x|-1|$ را رسم می‌کنیم و با انتقال نمودار این تابع به‌اندازهٔ یک واحد به‌سمت پایین، نمودار $f(x)$ را به‌دست می‌آوریم:



با توجه به نمودار، پاره‌خط OB روی خط $y=x$ قرار می‌گیرد. پس تابع خطی $y=x$ این تابع را در بی‌شمار نقطه قطع می‌کند، از طرفی شیب پاره‌خط OC و AB برابر -1 است.

پس توابعی مانند $g(x)=-x$ و $h(x)=-x-2$ وجود دارند که این تابع را در بی‌شمار نقطه قطع می‌کنند. بنابراین سه تابع با این ویژگی وجود دارد.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

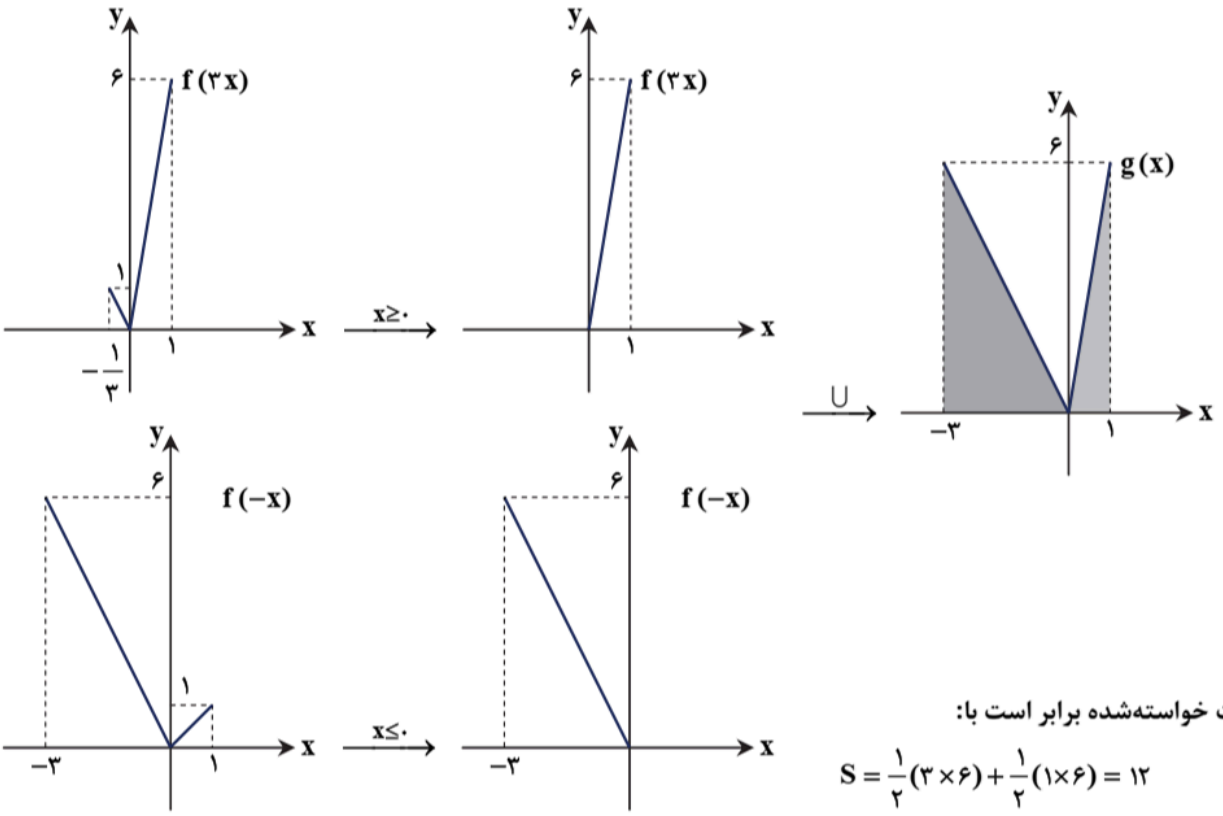
۱۱۷ نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{۱}{k}$ ضرب کنیم.

نکته: برای رسم نمودار $y=f(-x)$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم.

با تعیین علامت x، ضابطهٔ تابع را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x \geq ۰ \Rightarrow |x| = x \\ x \leq ۰ \Rightarrow |x| = -x \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} f(۳x) & ; \ x \geq ۰ \\ f(-x) & ; \ x \leq ۰ \end{cases}$$

برای رسم نمودار $f(۳x)$ از روی نمودار $f(x)$ طول نقاط را در $\frac{۱}{۳}$ ضرب می‌کنیم. بنابراین نمودار $f(۳x)$ را با دامنهٔ $x \geq ۰$ و نمودار $f(-x)$ را با دامنهٔ $x \leq ۰$ رسم می‌کنیم:



بنابراین مساحت خواسته‌شده برابر است با:

$$S = \frac{۱}{۲}(۳ \times ۶) + \frac{۱}{۲}(۱ \times ۶) = ۱۲$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۸ نکته: برای رسم نمودار $y=-f(x)$، کافی است نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم.

نکته: برای رسم نمودار $y=f(-x)$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(x+k)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را $|k|$ واحد در امتداد محور طول‌ها انتقال دهیم. اگر $k>0$ باشد، انتقال در جهت منفی و اگر $k<0$ باشد، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

نکته: معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2+bx+c=0$ با شرط $\Delta=0$ ریشهٔ مضاعف دارد.

نمودار تابع f نسبت به مبدأ، یعنی نسبت به هر دو محور طول‌ها و عرض‌ها قرینه شده است، پس ضابطهٔ آن به‌صورت $g(x)=-f(-x)$ تغییر کرده است؛ بنابراین:

$$f(x)=x^2-3x \xrightarrow[\text{مبدأ مختصات}]{\text{قرینه نسبت به}} y=-((-x)^2-3(-x))=-(x^2+3x) \xrightarrow[x\to x-k]{k\text{ واحد به سمت راست}} y=-((x-k)^2+3(x-k))$$

$$\Rightarrow y=h(x)=-x^2+2kx-k^2-3x+3k$$

تابع به‌دست‌آمده بر تابع f مماس است، پس معادلهٔ حاصل از تلاقی آن‌ها باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

$$f(x)=h(x) \Rightarrow x^2-3x=-x^2+2kx-k^2-3x+3k \Rightarrow 2x^2-2kx+k^2-3k=0 \quad \text{(معادلهٔ برخورد)}$$

$$\Delta=0 \Rightarrow (-2k)^2-4(2)(k^2-3k)=0 \Rightarrow 4k^2-8k^2+24k=0 \Rightarrow 4k^2-24k=0 \Rightarrow 4k(k-6)=0 \Rightarrow \begin{cases} k=0 & \times \\ k=6 & \checkmark \end{cases}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۹ نکته: برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f، در معادلهٔ $y=f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x، $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

نکته: $(fof)(x)=f(f(x))$

تابع f یک تابع خطی اکیداً نزولی است، پس ضابطهٔ آن را به‌صورت $f(x)=ax+b$ با شرط $a<0$ فرض می‌کنیم. اکنون داریم:

$$(fof)(x)=f(f(x))=f(ax+b)=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$$

طبق فرض سؤال $(fof)(x)=9x-4$ است؛ بنابراین:

$$a^2x+ab+b=9x-4 \Rightarrow \begin{cases} a^2=9 \Rightarrow a=\pm 3 \xrightarrow{a<0} a=-3 \quad (1) \\ ab+b=-4 \xrightarrow{(1)} -3b+b=-4 \Rightarrow b=2 \end{cases}$$

با توجه به مقادیر a و b داریم: $f(x)=-3x+2$, $g(x)=2f(\frac{x}{3}) \Rightarrow g(x)=2(-3(\frac{x}{3})+2)=-2x+4$

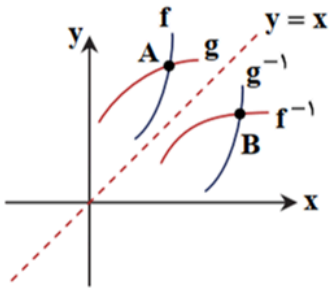
حالا وارون g را به‌دست می‌آوریم: $y=-2x+4 \Rightarrow 2x=4-y \Rightarrow x=\frac{1}{2}(4-y) \Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{1}{2}(4-x)$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۰ نکته: اگر f^{-1}، وارون تابع f باشد، داریم:

$$(a,b)\in f \Leftrightarrow (b,a)\in f^{-1}$$

با توجه به نکتهٔ بالا اگر توابع وارون‌پذیر f و g در نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ متقاطع باشند، توابع f^{-1} و g^{-1} در نقطهٔ $B(\beta,\alpha)$ متقاطع هستند:



محاسبهٔ وارون تابع $g(x)=-x^3-2x+9$ دشوار است، اگر نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ محل برخورد تابع f با g^{-1} باشد، نقطهٔ $B(\beta,\alpha)$ محل برخورد f^{-1} با g است. بنابراین داریم:

$$f(x)=y=-\frac{x}{2}+\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{1}{2}-y \Rightarrow x=1-2y \Rightarrow f^{-1}(x)=1-2x$$

$$g(x)=f^{-1}(x) \Rightarrow -x^3-2x+9=1-2x \Rightarrow -x^3=-8 \Rightarrow x=2 \Rightarrow g(2)=f^{-1}(2)=-3$$

$$\xrightarrow{\text{محل برخورد } gf^{-1}} B(2,-3) \xrightarrow{\text{محل برخورد } fg^{-1}} A(-3,2)$$

اکنون فاصلهٔ A تا مبدأ را به‌دست می‌آوریم:

$$AO=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۱ نکته: اگر f^{-1}، وارون تابع f باشد، داریم: $(a,b)\in f \Leftrightarrow (b,a)\in f^{-1}$

نکته: $(gof)(x)=g(f(x))$

ابتدا داریم: $(g^{-1}of^{-1})(8)=g^{-1}(f^{-1}(8))$

پس $f^{-1}(8)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f^{-1}(8)=a \Rightarrow f(a)=8 \Rightarrow a+2\sqrt{a}=8 \xrightarrow{+1} a+2\sqrt{a}+1=9$$

$$\Rightarrow (\sqrt{a}+1)^2=9 \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{a}+1=3 \Rightarrow \sqrt{a}=2 \Rightarrow a=4\\ \sqrt{a}+1=-3 \Rightarrow \sqrt{a}=-2 \quad \text{غیرممکن}\end{cases}$$

بنابراین: $f^{-1}(8)=a=4$

پس خواستهٔ سؤال $g^{-1}(f^{-1}(8))=g^{-1}(4)$ است؛ اکنون داریم:

$$g^{-1}(4)=b \Rightarrow g(b)=4 \Rightarrow \frac{2b+1}{b-3}=4 \Rightarrow 2b+1=4b-12 \Rightarrow b=\frac{13}{2} \Rightarrow g^{-1}(4)=\frac{13}{2}$$

پس: $(g^{-1}of^{-1})(8)=g^{-1}(f^{-1}(8))=g^{-1}(4)=\frac{13}{2}=6/5$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۲ راه‌حل اول:

نکته: برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f، در معادلهٔ $y=f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x، $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

ابتدا ضابطهٔ تابع f را تغییر می‌دهیم و به‌شکل مربع دوجمله‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=x+2\sqrt{x-1}=x-1+2\sqrt{x-1}+1 \Rightarrow f(x)=(\sqrt{x-1}+1)^2$$

اکنون ضابطهٔ وارون تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$y=(\sqrt{x-1}+1)^2 \xrightarrow[y\geq 1]{\sqrt{x-1}+1\geq 1} \sqrt{y}=\sqrt{x-1}+1 \Rightarrow \sqrt{y}-1=\sqrt{x-1}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} (\sqrt{y}-1)^2=x-1 \Rightarrow x=(\sqrt{y}-1)^2+1 \Rightarrow f^{-1}(x)=(\sqrt{x}-1)^2+1=x-2\sqrt{x}+2 \ , \ x\geq 1$$

با توجه به اینکه $f^{-1}(x)=x+a\sqrt{x}+b$، بنابراین:

$$a=-2 \ , \ b=2 \Rightarrow a-b=-4$$

راه‌حل دوم:

نکته: اگر f^{-1}، وارون تابع f باشد، داریم:

$$(a,b)\in f \Leftrightarrow (b,a)\in f^{-1}$$

$$\begin{cases} f(1)=1 \Rightarrow f^{-1}(1)=1 \Rightarrow 1+a+b=1 \Rightarrow a+b=0 \\ f(2)=4 \Rightarrow f^{-1}(4)=2 \Rightarrow 4+2a+b=2 \Rightarrow 2a+b=-2 \end{cases} \xrightarrow{(-)} a=-2 \ , \ b=2 \Rightarrow a-b=-4$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۳ نکته: اگر f^{-1}، وارون تابع f باشد، داریم:

$$(a,b)\in f \Leftrightarrow (b,a)\in f^{-1}$$

نکته: $(gof)(x)=g(f(x))$

$$(f^{-1}og)(x)=\frac{3x}{2x+1} \Rightarrow f^{-1}(g(x))=\frac{3x}{2x+1} \Rightarrow f(\frac{3x}{2x+1})=g(x) \qquad (*)$$

خواستهٔ سؤال $f(1)$ است؛ بنابراین:

$$\frac{3x}{2x+1}=1 \Rightarrow 3x=2x+1 \Rightarrow x=1$$

$$(*) \xrightarrow{x=1} f(1)=g(1)$$

پس به‌جای محاسبهٔ $f(1)$ کافی است $g(1)$ را به‌دست آوریم:

$$\begin{cases} g(1)=a \Rightarrow g^{-1}(a)=1 \\ g^{-1}(x)=13-2x \end{cases} \Rightarrow g^{-1}(a)=13-2a=1 \Rightarrow 2a=12 \Rightarrow a=6$$

بنابراین:

$$g(1)=6 \xrightarrow{f(1)=g(1)} f(1)=6$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۴ نکته : $(gof)(x)=g(f(x))$

با توجه به رابطهٔ داده‌شده، $(fog)(۳)$ موجود است، پس باید $۳\in D_g$ باشد؛ بنابراین $a=۳$ است و $g=\{(۱,۲),(۳,-۱),(۴,۳)\}$. اکنون داریم:

$$(fog)(۳)=f(g(۳))=f(-۱)=(-۱)^۲-۳(-۱)=۴$$

$$(gof)(b)+\underbrace{(fog)(۳)}_{۴}=۷ \Rightarrow (gof)(b)=۳ \Rightarrow g(f(b))=۳ \xrightarrow{g(۴)=۳} f(b)=۴ \Rightarrow b^۲-۳b=۴$$

$$\Rightarrow b^۲-۳b-۴=۰ \Rightarrow (b+۱)(b-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} b=-۱ \\ b=۴ \end{cases}$$

اختلاف مقادیر ممکن برای b برابر ۵ است که $\frac{۵}{۳}$ برابر a است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۵ نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{۱}{k}$ ضرب کنیم.

اگر $۰<k<۱$، نمودار $f(x)$ در امتداد محور طول‌ها با ضریب $\frac{۱}{k}$ کشیده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انبساط افقی یافته است.

اگر $k>۱$، نمودار $f(x)$ در امتداد محور طول‌ها با ضریب $\frac{۱}{k}$ فشرده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انقباض افقی یافته است.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$، کافی است. عرض نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در k ضرب کنیم.

اگر $۰<k<۱$، نمودار $f(x)$ در امتداد محور عرض‌ها با ضریب k فشرده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انقباض عمودی یافته است.

اگر $k>۱$، نمودار $f(x)$ در امتداد محور عرض‌ها با ضریب k کشیده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انبساط عمودی یافته است.

$$y=\frac{۲}{۳}f(\frac{۳}{۲}x) \xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم.}]{\text{عرض نقاط را در } \frac{۹}{۴}} y=\frac{۹}{۴}\times\frac{۲}{۳}f(\frac{۳}{۲}x)=\frac{۳}{۲}f(\frac{۳}{۲}x)$$

$$y=\frac{۳}{۲}f(\frac{۳}{۲}x) \xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم.}]{\text{طول نقاط را در } \frac{۴}{۹}} y=\frac{۳}{۲}f(\frac{۴}{۹}\times\frac{۳}{۲}x)=\frac{۳}{۲}f(\frac{۲}{۳}x)$$

چون $\frac{۹}{۴}>۱$ است، نمودار انبساط عمودی پیدا می‌کند:

چون $\frac{۴}{۹}<۱$ است، نمودار انبساط افقی پیدا کرده است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۶ نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(x+k)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را $|k|$ واحد در امتداد محور طول‌ها انتقال دهیم. اگر $k>0$ باشد، انتقال در جهت منفی و اگر $k<0$ باشد، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(-x)$، نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم.

راه‌حل اول:

نمودار تابع f نسبت به محور عرض‌ها قرینه شده است، پس x به $-x$ تبدیل می‌شود:

$$y=(-x)^۲-۶(-x)+۱=x^۲+۶x+۱$$

نمودار تابع به‌دست آمده، k واحد به‌سمت راست انتقال پیدا کرده است، پس به‌جای x، $x-k$ قرار می‌دهیم:

$$y=(x-k)^۲+۶(x-k)+۱=x^۲-۲kx+k^۲+۶x-۶k+۱$$

$$\Rightarrow y=x^۲+(-۲k+۶)x+k^۲-۶k+۱$$

نمودار به‌دست آمده بر نمودار f منطبق است؛ بنابراین:

$$x^۲+(-۲k+۶)x+k^۲-۶k+۱=x^۲-۶x+۱ \Rightarrow \begin{cases} -۲k+۶=-۶ \Rightarrow k=۶ \\ k^۲-۶k+۱=۱ \xrightarrow{k=۶} ۱=۱ \quad ✓ \end{cases}$$

راه‌حل دوم:

پس از مربع کامل کردن $f(x)$، مراحل بیان‌شده را انجام می‌دهیم:

$$f(x)=x^۲-۶x+۹-۸=(x-۳)^۲-۸ \xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور عرض‌ها}} y=(-x-۳)^۲-۸=(x+۳)^۲-۸$$

$$\xrightarrow[x\to x-k]{k\text{ واحد به‌سمت راست}} y=(x-k+۳)^۲-۸$$

نمودار به‌دست آمده بر $f(x)$ منطبق است؛ بنابراین:

$$-k+۳=-۳ \Rightarrow k=۶$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۷ نکته: اگر $f^{-۱}$، وارون f باشد، آنگاه:

$$(a,b)\in f \Leftrightarrow (b,a)\in f^{-۱}$$

چون g وارون‌پذیر است، پس f هم وارون‌پذیر است.

ابتدا فرض می‌کنیم $f^{-۱}(۷)=\alpha$، پس $f(\alpha)=۷$. در تساوی داده‌شده به‌جای x مقدار α را قرار می‌دهیم و داریم:

$$f(\alpha)=۳-۴g(\frac{\alpha}{۲}-۱) \Rightarrow ۷=۳-۴g(\frac{\alpha}{۲}-۱)$$

$$g(\frac{\alpha}{۲}-۱)=-۱ \Rightarrow g^{-۱}(-۱)=\frac{\alpha}{۲}-۱ \xrightarrow{\times ۲} ۲g^{-۱}(-۱)=\alpha-۲$$

$$\Rightarrow ۲g^{-۱}(-۱)+۲=\alpha \xrightarrow{f^{-۱}(۷)=\alpha} ۲g^{-۱}(-۱)+۲=f^{-۱}(۷) \Rightarrow f^{-۱}(۷)-۲g^{-۱}(-۱)=۲$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۸ نکته: اگر f^{-1}، وارون تابع f باشد، آنگاه:

$$(a,b)\in f \Leftrightarrow (b,a)\in f^{-1}$$

نقطهٔ $A(۲,۳)$ روی نمودار $y=f(x)$ است، پس:

$$f(۲)=۳$$

اکنون اگر نقطهٔ M متناظر A روی نمودار $y=۴-f(۱-\frac{x}{۲})$ باشد، داریم:

$$\begin{cases} f(۲)=۳ \Rightarrow ۱-\frac{x}{۲}=۲ \Rightarrow \frac{x}{۲}=-۱ \Rightarrow x=-۲ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow M(-۲,۱) \\ x=-۲ \Rightarrow y=۴-f(۲) \xrightarrow{f(۲)=۳} y=۱ \end{cases}$$

بنابراین نقطهٔ $M(-۲,۱)$، متناظر نقطهٔ A روی نمودار $y=۴-f(۱-\frac{x}{۲})$ است و اگر جای x و y را عوض کنیم نقطهٔ $A'(۱,-۲)$ روی وارون نمودار داده شده است، پس: $\alpha=۱$، $\beta=-۲$ و $\alpha-\beta=۳$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۹ نکته: اگر برای هر دو نقطهٔ $x_۱$ و $x_۲$ از مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ که $x_۱<x_۲$، داشته باشیم $f(x_۱)<f(x_۲)$، آنگاه f را تابعی اکیداً صعودی می‌نامیم.

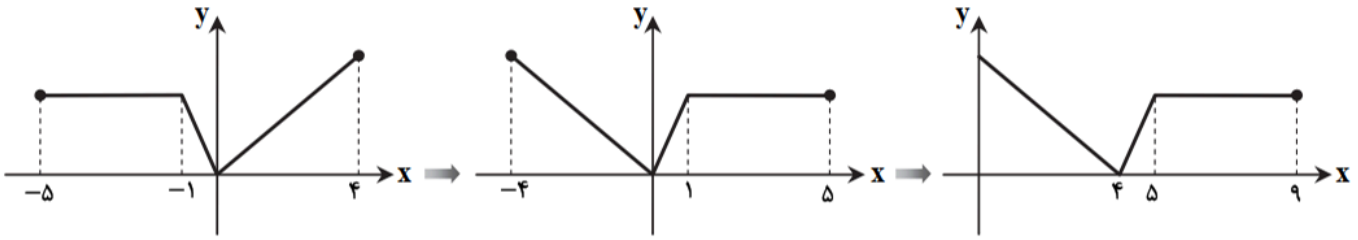
نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(x+k)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را $|k|$ واحد در امتداد محور طول‌ها انتقال دهیم. اگر $k>۰$ باشد، انتقال در جهت منفی و اگر $k<۰$ باشد، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{۱}{k}$ ضرب کنیم.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(-x)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم.

ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم. برای این کار نمودار y را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم و سپس چهار واحد به‌سمت راست انتقال می‌دهیم.

$$y=f(۴-x) \xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور عرض‌ها}} y=f(۴+x) \xrightarrow[x\to x-۴]{۴\text{ واحد به راست}} y=f(x)$$



برای رسم تابع $g(x)=f(\frac{x}{۳})$، طول نقاط نمودار f را سه برابر می‌کنیم. از طرفی تابع f در بازهٔ $[۴,۵]$ اکیداً صعودی است، پس تابع g در بازهٔ $[۱۲,۱۵]$ اکیداً صعودی است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۰ نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(x)+k$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را $|k|$ واحد در امتداد محور عرض‌ها انتقال دهیم. اگر $k>0$ باشد، انتقال در جهت مثبت و اگر $k<0$ باشد، انتقال در جهت منفی خواهد بود.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(x+k)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را $|k|$ واحد در امتداد محور طول‌ها انتقال دهیم. اگر $k>0$ باشد، انتقال در جهت منفی و اگر $k<0$ باشد، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y=-f(x)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(-x)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم.

برای آنکه نمودار تابع را نسبت به مبدأ مختصات قرینه کنیم، کافی است هم زمان x را به $-x$ و y را به $-y$ تبدیل کنیم:

$$y=-((-x)^2+4(-x))=-(x^2-4x) \Rightarrow y=4x-x^2$$

حال ضابطهٔ به‌دست آمده را a واحد به بالا و $2a$ واحد به چپ انتقال می‌دهیم.

$$y=4(x+2a)-(x+2a)^2+a \quad (1)$$

از طرفی:

$$f(x)=x^2+4x \Rightarrow f(0)=0$$

پس نمودار دو تابع در مبدأ مختصات متقاطع هستند، بنابراین:

$$(1) \xrightarrow[y=0]{x=0} 4(0+2a)-(0+2a)^2+a=0 \Rightarrow 8a-4a^2+a=0$$

$$\Rightarrow 9a-4a^2=0 \Rightarrow a(9-4a)=0 \Rightarrow a=0\ ,\ a=\frac{9}{4} \xrightarrow{a\neq 0} a=\frac{9}{4}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۱ نکته: $(fog)(x)=f(g(x))$

نکته: $|x|=a \xrightarrow{a>0} x=\pm a$

با توجه به اینکه دامنهٔ تابع f برابر $\mathbb{R}$ است، دامنهٔ تابع fog همان دامنهٔ $g(x)$ است. بنابراین:

$$x+5\geq 0 \Rightarrow x\geq -5$$

برای راحتی کار ضابطهٔ f را به‌کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای، به‌صورت زیر می‌نویسیم و ضابطهٔ fog را تشکیل می‌دهیم.

$$f(x)=x^2-4x+1=x^2-4x+4-3=(x-2)^2-3$$

اکنون داریم:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x+5}+2)=(\sqrt{x+5}+2-2)^2-3=(\sqrt{x+5})^2-3$$

$$\xrightarrow{x\geq -5} (fog)(x)=x+5-3=x+2\ ,\ x\geq -5$$

اکنون معادلهٔ داده‌شده را حل می‌کنیم:

$$|(fog)(x)|=4 \Rightarrow |x+2|=4 \Rightarrow \begin{cases} x+2=4 \Rightarrow x=2 & \checkmark \\ x+2=-4 \Rightarrow x=-6 & \times \end{cases}$$

با توجه به شرط $x\geq -5$، تنها جواب معادله $x=2$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۲ نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(-x)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم.
نکته: نمودار تابع f و تابع وارون آن نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم) قرینه‌اند.
نکته: برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f، در معادلهٔ $y=f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x، $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.
ابتدا با تبدیل x به $-x$، ضابطهٔ قرینهٔ نمودار f را نسبت به محور عرض‌ها به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{2x-1}{x+3} \xrightarrow{x\to -x} y=\frac{2(-x)-1}{-x+3}=\frac{-2x-1}{-x+3} \Rightarrow y=\frac{2x+1}{x-3}$$

اکنون وارون تابع به‌دست آمده را محاسبه می‌کنیم:

$$y=\frac{2x+1}{x-3} \Rightarrow yx-3y=2x+1 \Rightarrow yx-2x=3y+1 \Rightarrow x(y-2)=3y+1$$

$$x=\frac{3y+1}{y-2} \xrightarrow{x\to y} y=\frac{3x+1}{x-2}=g(x)$$

اکنون داریم:

$$(gof)(-2)=g(f(-2))=g(-5)=\frac{-15+1}{-5-2}=2$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۳ نکته: برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f، در معادلهٔ $y=f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x، $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.
راه‌حل اول:
ابتدا به کمک تشکیل مربع کامل وارون f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=y=x+2\sqrt{x-1} \Rightarrow y=x-1+2\sqrt{x-1}+1$$

$$\Rightarrow y=(\sqrt{x-1}+1)^2 \xrightarrow[y\geq 1]{\sqrt{x-1}+1\geq 1} \Rightarrow \sqrt{y}=\sqrt{x-1}+1$$

$$\Rightarrow \sqrt{y}-1=\sqrt{x-1} \xrightarrow{\text{توان ۲}} (\sqrt{y}-1)^2=x-1 \Rightarrow x=(\sqrt{y}-1)^2+1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=(\sqrt{x}-1)^2+1=g(x) \;;\; x\geq 1$$

اکنون داریم:

$$g(4)=(\sqrt{4}-1)^2+1=2$$

$$f^{-1}=g \Rightarrow g^{-1}=f \Rightarrow g^{-1}(5)=f(5)=5+2\sqrt{5-1}=9$$

پس حاصل خواسته‌شده برابر است با:

$$g(4)+g^{-1}(5)=2+9=11$$

راه‌حل دوم:
نکته: اگر f^{-1}، وارون تابع f باشد، آنگاه: $(a,b)\in f \Leftrightarrow (b,a)\in f^{-1}$
برای محاسبهٔ $g(4)$ می‌توان از روش زیر استفاده کرد.

$$g=f^{-1} \Rightarrow g(4)=f^{-1}(4)=a \Rightarrow f(a)=4$$

$$\Rightarrow a+2\sqrt{a-1}=4 \Rightarrow 2\sqrt{a-1}=4-a \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4a-4=16-8a+a^2$$

$$\Rightarrow a^2-12a+20=0 \Rightarrow (a-2)(a-10)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=2 & \checkmark \\ a=10 & \times \end{cases}$$ در معادله صدق نمی‌کند.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۴ نکته: اگر f^{-1}، وارون تابع f باشد، آنگاه: $(a,b)\in f \Leftrightarrow (b,a)\in f^{-1}$

نقطهٔ $(۰,۳)$ روی هر دو نمودار f و f^{-1} قرار دارد. بنابراین داریم:

$$f(۳)=۰ \Rightarrow a-\sqrt{۹-b}=۰ \Rightarrow a=\sqrt{۹-b} \quad (۱)$$

$$f^{-1}(۳)=۰ \Rightarrow f(۰)=۳ \Rightarrow a-\sqrt{-b}=۳ \Rightarrow a=۳+\sqrt{-b} \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \sqrt{۹-b}=۳+\sqrt{-b} \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۹-b=۹+۶\sqrt{-b}-b$$

$$\Rightarrow ۶\sqrt{-b}=۰ \Rightarrow b=۰ \xrightarrow{(۱)} a=\sqrt{۹}=۳$$

بنابراین:

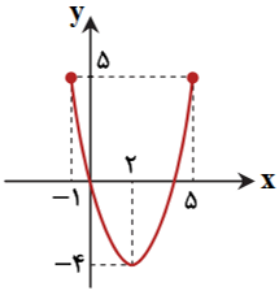
$$f(x)=۳-\sqrt{۳x} \Rightarrow f(b+۹a)=f(۲۷)=۳-\sqrt{۸۱}=-۶$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۵ ابتدا با حل نامعادلهٔ $|x-۲|\le ۳$، دامنهٔ تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$|x-۲|\le ۳ \Rightarrow -۳\le x-۲\le ۳ \Rightarrow -۱\le x\le ۵$$

اکنون سهمی $y=x^۲-۴x$ را با دامنهٔ $[-۱,۵]$ رسم می‌کنیم. رأس این سهمی نقطهٔ $(۲,-۴)$ است و سهمی از مبدأ مختصات می‌گذرد. همچنین نقاط ابتدایی و انتهایی بازه به‌صورت $(-۱,۵)$ و $(۵,۵)$ می‌باشند، پس نمودار سهمی به این صورت است:



بنابراین برد این تابع به‌صورت $[-۴,۵]$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۶ نکته: هر تابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می‌شود. برای آنکه f تابع باشد، باید هریک از دو مقدار $f(۲)$ و $f(-۲)$ در دو ضابطهٔ مختلف یکتا باشند، پس:

$$\begin{cases} a\times ۲+b=۲^۲+۳\times ۲ \\ a\times(-۲)+b=(-۲)^۲+۳\times(-۲) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲a+b=۱۰ \\ -۲a+b=-۲ \end{cases} \Rightarrow b=۴\ ,\ a=۳$$

پس $f(x)=\begin{cases} ۳x+۴ & |x|\ge ۲ \\ x^۲+۳x & |x|\le ۲ \end{cases}$ و با توجه به اینکه $|-۳|\ge ۲$ داریم:

$$f(-۳)=۳(-۳)+۴=-۹+۴=-۵$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۷ نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(x+k)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را $|k|$ واحد در امتداد محور طول‌ها انتقال دهیم. اگر $k>0$ باشد، انتقال در جهت منفی و اگر $k<0$ باشد، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(x)+k$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را $|k|$ واحد در امتداد محور عرض‌ها انتقال دهیم. اگر $k>0$ باشد، انتقال در جهت مثبت و اگر $k<0$ باشد، انتقال در جهت منفی خواهد بود.

نکته: فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ برابر است با $AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$.

ابتدا ضابطهٔ تابع انتقال‌یافته را می‌یابیم:

$$f(x)=\frac{1}{x} \xrightarrow{\text{۳ واحد به راست}} f(x-3)=\frac{1}{x-3} \xrightarrow{\frac{3}{2}\text{ واحد به بالا}} f(x-3)+\frac{3}{2}=\frac{1}{x-3}+\frac{3}{2}$$

برای یافتن نقاط تلاقی دو تابع باید معادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$f(x-3)+\frac{3}{2}=f(x) \Rightarrow \frac{1}{x-3}+\frac{3}{2}=\frac{1}{x} \xrightarrow{\times 2x(x-3)} 2x+3x(x-3)=2(x-3)$$

$$\Rightarrow 2x+3x^2-9x=2x-6 \Rightarrow 3x^2-9x+6=0 \Rightarrow x^2-3x+2=0 \Rightarrow x=1 \text{ یا } x=2$$

بنابراین مختصات دو نقطهٔ A و B به‌صورت $(1,1)$ و $(2,\frac{1}{2})$ است. فاصلهٔ این دو نقطه از یکدیگر برابر است با:

$$AB=\sqrt{(2-1)^2+(\frac{1}{2}-1)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۸ نکته: تابعی خطی است که ضابطهٔ آن $f(x)=ax+b$ (درجهٔ ۱) باشد.

مطابق نکته داریم:

$$f(x)=ax^2+bx+2b-x^2-a=(a-1)x^2+bx+2b-a \xrightarrow{f\text{ تابع خطی است.}} a-1=0 \Rightarrow a=1 \Rightarrow f(x)=bx+2b-1$$

مطابق فرض سؤال $f(0)=3$، پس:

$$3=2b-1 \Rightarrow b=2 \Rightarrow f(x)=2x+3$$

محل تقاطع با محور طول‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$2x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۹ نکته: برای به‌دست آوردن ضابطهٔ وارون تابع خطی غیرثابت f، در ضابطهٔ $y=f(x)$، x را برحسب y به‌دست آورده و سپس جای y و x را عوض می‌کنیم. ضابطهٔ جدید به‌دست آمده، ضابطهٔ $f^{-1}(x)$ است.

$$f(x)=2x+4 \Rightarrow y=2x+4 \Rightarrow y-4=2x \Rightarrow x=\frac{1}{2}y-2 \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-2$$

$$f^{-1}(x)=a+bf(x) \Rightarrow f^{-1}(x)=a+b(2x+4) \Rightarrow f^{-1}(x)=2bx+4b+a$$

کافی است دو رابطهٔ به‌دست آمده را با هم برابر قرار دهیم:

$$\begin{cases} f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-2 \\ f^{-1}(x)=2bx+4b+a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b=\frac{1}{2} \Rightarrow b=\frac{1}{4} \quad (I) \\ 4b+a=-2 \xrightarrow{(I)} 1+a=-2 \Rightarrow a=-3 \end{cases}$$

$$a+8b=-3+2=-1 \Rightarrow f^{-1}(a+8b)=f^{-1}(-1)=\frac{1}{2}(-1)-2=-2/5$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۰ نکته: دامنهٔ تابع $(\frac{f}{g})(x)$، به‌صورت روبه‌رو محاسبه می‌شود: $D_{(\frac{f}{g})(x)} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$

ابتدا دامنهٔ دو تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2} \qquad D_f : 4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_f = [-2, 2]$$

$$g(x) = \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x+1}} \qquad D_g : x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow D_g = (-1, +\infty)$$

$$D_f \cap D_g = [-2, 2] \cap (-1, +\infty) = (-1, 2]$$

اکنون باید مقادیری از x که به‌ازای آن‌ها $g(x) = 0$ است را از $D_f \cap D_g$ حذف کنیم:

$$g(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$D_{(\frac{f}{g})(x)} = (-1, 2] - \{0, 2\} = (-1, 2) - \{0\}$$

بنابراین دامنهٔ تابع $\frac{f}{g}$، فقط شامل عدد صحیح $x = 1$ می‌باشد.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۱ نکته: اگر $k \in \mathbb{Z}$ و $k \leq x < k + 1$، آنگاه: $[x] = k$ و برعکس.

نکته: اگر $k \in \mathbb{Z}$ و $x \in \mathbb{R}$، داریم: $[x + k] = [x] + k$.

نکته: اگر $x \in \mathbb{R}$، آنگاه: $[x] \in \mathbb{Z}$.

با توجه به نکات داریم:

$$[x + \underbrace{[x+1]}_{\in \mathbb{Z}}] = 5 \Rightarrow [x] + [x+1] = 5 \Rightarrow [x] + [x] + 1 = 5$$

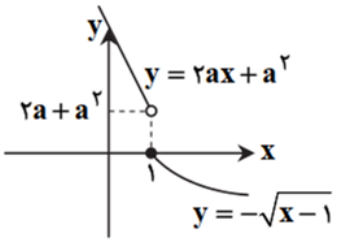
$$\Rightarrow 2[x] = 4 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow 2 \leq x < 3 \Rightarrow$$ پس x یک مقدار صحیح دارد.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۲ نکته: اگر هر خط موازی محور طول‌ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آنگاه آن تابع، یک‌به‌یک است.

به کمک رسم نمودار، یک‌به‌یک بودن تابع f را بررسی می‌نماییم.

ضابطهٔ اول یک تابع رادیکالی با شیب منفی است، پس شیب ضابطهٔ دوم هم که یک تابع خطی است، باید منفی باشد و نمودار تابع خطی باید بالاتر از نمودار تابع رادیکالی باشد، پس داریم:



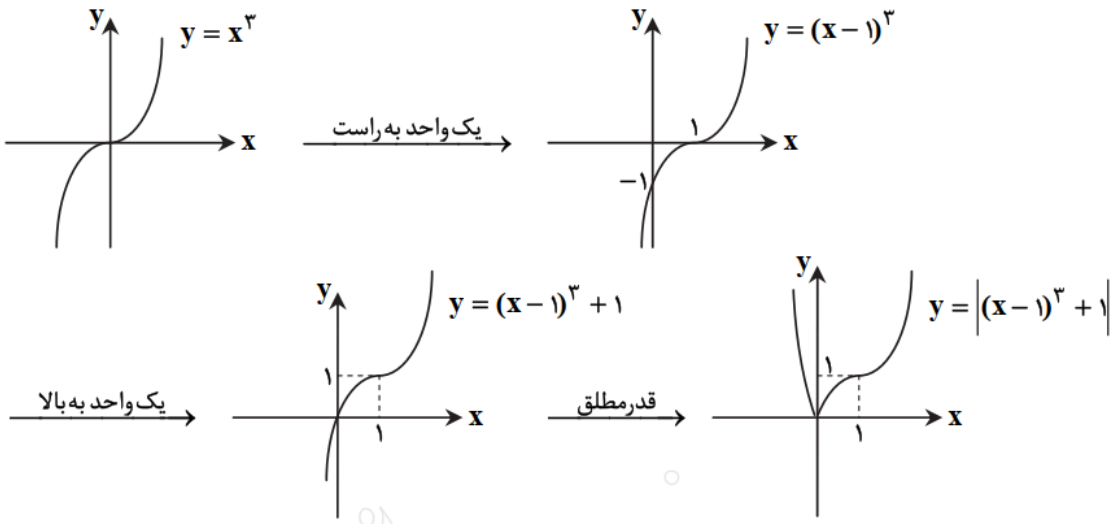
$$\begin{cases} 2a < 0 \\ 2a + a^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ a \geq 0 \text{ یا } a \leq -2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} a \leq -2$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۳ نکته: $(a-b)^۳ = a^۳ - ۳a^۲b + ۳ab^۲ - b^۳$

نکته: برای رسم نمودار $y = |f(x)|$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را رسم کنیم و در قسمت‌هایی که نمودار f زیر محور طول‌ها است، قرینهٔ نمودار f را نسبت به محور طول‌ها رسم کنیم.

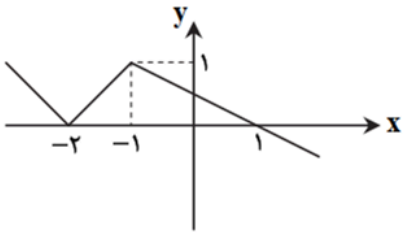
با توجه به اینکه $(x-۱)^۳ = x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۱$، پس: $y = |x^۳ - ۳x^۲ + ۳x| = |(x-۱)^۳ + ۱|$



(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

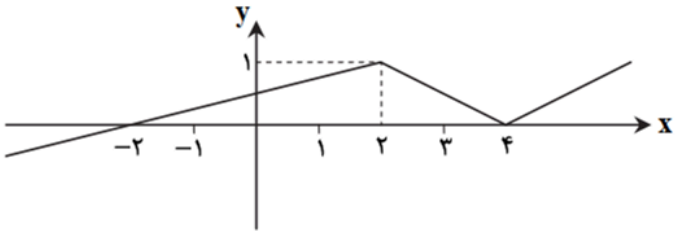
۱۴۴ نکته: برای رسم نمودار $y = f(ax+b)$ $(۰ < a < ۱, b > ۰)$، ابتدا نمودار $y = f(x)$ را به‌اندازهٔ b واحد در راستای محور xها به‌سمت چپ منتقل نموده و سپس آن را با ضریب $\frac{۱}{a}$ در راستای محور xها منبسط می‌کنیم.

نکته: برای رسم نمودار $y = f(-x)$، باید نمودار تابع f را نسبت به محور yها قرینه کنیم.



ابتدا نمودار $y = f(x)$ را یک واحد به‌سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار $y = f(x+۱)$ به‌دست آید:

حال نمودار حاصل را در راستای محور xها با ضریب ۲ منبسط کرده، سپس نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = f(-\frac{x}{۲}+۱)$ به‌دست آید:



با توجه به نمودار، تابع در بازهٔ $[۲,۴]$ نزولی است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۵ نکته: $(gof)(x)=g(f(x))$

نکته (دامنهٔ تابع مرکب): دامنهٔ تابع مرکب gof، مجموعهٔ xهایی است که هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کنند:

۱- x در دامنهٔ f قرار داشته باشد.

۲- $f(x)$ در دامنهٔ g قرار داشته باشد.

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

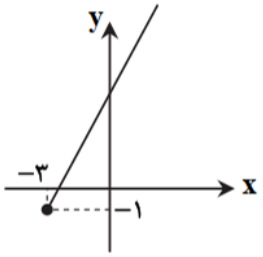
ابتدا دامنهٔ توابع f و gof را محاسبه می‌کنیم:

$$D_f: x+۳\geq ۰ \Rightarrow x\geq -۳$$
$$D_{gof}=\{x\geq -۳ \mid f(x)\in \mathbb{R}\}=[-۳,+\infty)$$

اکنون ضابطهٔ تابع gof را به‌دست می‌آوریم:

$$(gof)(x)=g(f(x))=۵(\sqrt{x+۳})^۲-۱=۵(x+۳)-۱=۵x+۱۴$$

برد تابع خطی $y=۵x+۱۴$ با دامنهٔ $[-۳,+\infty)$ را به‌کمک رسم نمودار به‌دست می‌آوریم:



بنابراین برد این تابع به‌صورت $[-۱,+\infty)$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۶ نکته: برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f، در معادلهٔ $y=f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x، $f^{-۱}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

نکته: اگر f تابعی وارون‌پذیر باشد، داریم:

$$\begin{cases} f(f^{-۱}(x))=x & : x\in D_{f^{-۱}} \\ f^{-۱}(f(x))=x & : x\in D_f \end{cases}$$

ابتدا داریم:

$$f(g(x))=x \Rightarrow f^{-۱}(f(g(x)))=f^{-۱}(x) \Rightarrow g(x)=f^{-۱}(x)$$

حال برای به‌دست آوردن $f^{-۱}(x)$ داریم:

$$y=\frac{۳x-۱}{x+۴} \Rightarrow ۳x-۱=yx+۴y \Rightarrow ۳x-yx=۴y+۱ \Rightarrow x(۳-y)=۴y+۱ \Rightarrow x=\frac{۴y+۱}{۳-y}$$

پس $g(x)=f^{-۱}(x)=\frac{۴x+۱}{۳-x}$؛ بنابراین داریم:

$$(gof^{-۱})(x)=g(g(x))=\frac{۴(\frac{۴x+۱}{۳-x})+۱}{۳-\frac{۴x+۱}{۳-x}}=\frac{۱۶x+۴-x+۳}{۹-۳x-۴x-۱}=\frac{۱۵x+۷}{-۷x+۸}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۷ نکته: $(a,b)\in f \Leftrightarrow (b,a)\in f^{-1}$

طول نقطهٔ برخورد تابع f^{-1} با خط $y=x+1$ را $x=a$ در نظر می‌گیریم:

$$y=x+1 \xrightarrow{x=a} y=a+1 \Rightarrow A(a,a+1)\in f^{-1} \Rightarrow A'(a+1,a)\in f$$

$$\Rightarrow f(a+1)=a \Rightarrow 2(a+1)-\frac{1}{a+1}=a \xrightarrow{\times(a+1)} 2(a+1)^2-1=a(a+1) \Rightarrow 2(a^2+2a+1)-1=a^2+a$$

$$\Rightarrow 2a^2+4a+2-1-a^2-a=0 \Rightarrow a^2+3a+1=0 \Rightarrow \Delta=9-4=5 \Rightarrow a=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2} \quad (1)$$

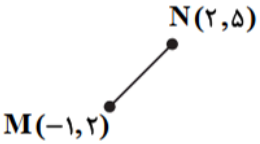
با توجه به اینکه دامنهٔ f بازهٔ $(-\infty,0)$ است، داریم:

$$a+1<0 \Rightarrow a<-1 \xrightarrow{(1)} a=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$$

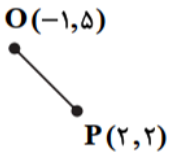
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۸ نکته: هر تابع که بتوان آن را به‌شکل $y=ax+b$ نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود که در آن مقدار a، شیب خط و مقدار b، عرض از مبدأ خط می‌باشد.

اگر دامنهٔ تابع $[-1,2]$ و برد آن $[2,5]$ باشد، دو حالت زیر رخ می‌دهد:



حالت اول: $a=\frac{5-2}{2-(-1)}=1 \Rightarrow y=x+b \xrightarrow{N(2,5)} 5=2+b \Rightarrow b=3 \Rightarrow y=x+3$



حالت دوم: $a=\frac{5-2}{-1-2}=-1 \Rightarrow y=-x+b \xrightarrow{P(2,2)} 2=-2+b \Rightarrow b=4 \Rightarrow y=-x+4$

نقطهٔ A محل برخورد این دو خط می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} y=x+3 \\ y=-x+4 \end{cases} \Rightarrow x+3=-x+4 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{2}+3=\frac{7}{2} \Rightarrow A\left(\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$$

پس مجموع طول و عرض نقطهٔ A، برابر با $\frac{1}{2}+\frac{7}{2}=4$ می‌باشد.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۹ نکته: معادله‌ای را که در آن متغیر در توان قرار گرفته باشد، معادلهٔ نمایی می‌نامند. برای حل معادلات نمایی از خاصیت یک‌به‌یک بودن تابع نمایی استفاده می‌کنیم. اگر a یک عدد حقیقی مثبت مخالف ۱ باشد و داشته باشیم $a^x = a^y$، آنگاه $x = y$ و برعکس.

نکته: $(a,b) \in f \Leftrightarrow (b,a) \in f^{-1}$

نمودار توابع f و g روی نیمساز ناحیهٔ اول یعنی خط $y = x$ با شرط $x > 0$ متقاطع هستند. پس ابتدا با حل معادلهٔ $g(x) = x$، محل برخورد را به‌دست می‌آوریم:

$$۳x^۲ + ۴x - ۶ = x \Rightarrow ۳x^۲ + ۳x - ۶ = ۰ \xrightarrow{\div ۳} x^۲ + x - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (x-۱)(x+۲) = ۰ \xrightarrow{x>۰} \begin{cases} x = ۱ \quad ✓ \Rightarrow A(۱,۱) & \text{نقطهٔ برخورد} \\ x = -۲ \quad ✗ \end{cases}$$

بنابراین نمودار f و g در نقطهٔ $A(۱,۱)$ متقاطع‌اند. پس داریم:

$$f(۱) = ۱ \Rightarrow -۳ + ۲^{a(۱)+۳} = ۱ \Rightarrow ۲^{a+۳} = ۴ = ۲^۲ \Rightarrow a + ۳ = ۲ \Rightarrow a = -۱ \Rightarrow f(x) = ۲^{-x+۳} - ۳$$

اگر $f^{-1}(۱۳) = \alpha$ باشد، آنگاه $f(\alpha) = ۱۳$. بنابراین:

$$f(\alpha) = ۲^{-\alpha+۳} - ۳ = ۱۳ \Rightarrow ۲^{-\alpha+۳} = ۱۶ = ۲^۴ \Rightarrow -\alpha + ۳ = ۴ \Rightarrow \alpha = -۱ \Rightarrow f^{-1}(۱۳) = -۱$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۰ نکته: $(fof)(x) = f(f(x))$

نکته: برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f، در معادلهٔ $y = f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x، $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

ابتدا تابع $y = (fof)(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x) = \frac{۳x}{x+۲} \Rightarrow (fof)(x) = f\left(\frac{۳x}{x+۲}\right) = \frac{۳\left(\frac{۳x}{x+۲}\right)}{\frac{۳x}{x+۲} + ۲} = \frac{\frac{۹x}{x+۲}}{\frac{۵x+۴}{x+۲}} \xrightarrow{x \neq -۲} (fof)(x) = \frac{۹x}{۵x+۴}$$

اکنون وارون تابع به‌دست آمده را به‌دست می‌آوریم:

راه‌حل اول:

$$y = \frac{۹x}{۵x+۴} \Rightarrow ۵xy + ۴y = ۹x \Rightarrow x(۵y - ۹) = -۴y \Rightarrow x = \frac{-۴y}{۵y-۹}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-۴x}{۵x-۹} \Rightarrow g(x) = \frac{-۴x}{۵x-۹} = \frac{ax}{۵x+b} \Rightarrow a = -۴ \ , \ b = -۹ \Rightarrow a + b = -۱۳$$

راه‌حل دوم:

نکته: وارون تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ (با شرط $ad \neq bc$)، به‌صورت $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$ است.

$$(fof)(x) = \frac{۹x}{۵x+۴} \Rightarrow (fof)^{-1}(x) = \frac{-۴x}{۵x-۹} = \frac{ax}{۵x+b} \Rightarrow a = -۴ \ , \ b = -۹ \Rightarrow a + b = -۱۳$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۱

نکته : $(gof)(x)=g(f(x))$

برای رسم نمودار تابع $f(x+k)$، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را $|k|$ واحد در امتداد محور xها انتقال دهیم. اگر $k>0$ باشد، انتقال در جهت منفی و اگر $k<0$ باشد، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

ابتدا ضابطهٔ تابع g را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=1-2x \Rightarrow (gof)(x)=g(f(x))=g(1-2x)=-8x^2-4x+4 \quad (1)$$

با فرض $1-2x=t$، داریم:

$$1-2x=t \Rightarrow x=\frac{1-t}{2} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow g(t)=-8(\frac{1-t}{2})^2-4(\frac{1-t}{2})+4 \Rightarrow g(t)=-2(1-2t+t^2)-2(1-t)+4=-2t^2+6t \Rightarrow g(x)=-2x^2+6x$$

تابع $g(x)$ یک سهمی است و نقطهٔ رأس آن بالاترین نقطهٔ آن است. بنابراین:

$$g(x)=-2x^2+6x \Rightarrow x_S=-\frac{b}{2a}=\frac{3}{2} \Rightarrow y_S=g(\frac{3}{2})=-2(\frac{9}{4})+6(\frac{3}{2})=\frac{9}{2}$$

پس نقطهٔ $S(\frac{3}{2},\frac{9}{2})$، بالاترین نقطهٔ تابع $g(x)$ است. برای به‌دست آوردن بالاترین نقطهٔ تابع $g(x-3)$، کافی است به طول نقطهٔ S، سه واحد اضافه کنیم. پس بالاترین نقطهٔ تابع $g(x-3)$، نقطهٔ $(4/5,4/5)$ و مجموع طول و عرض آن برابر با ۹ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۲

نکته: $|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$

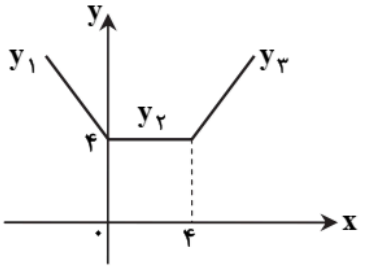
نکته: برای رسم نمودار تابع $f(x+k)$، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را $|k|$ واحد در امتداد محور xها انتقال دهیم. اگر $k > 0$ باشد، انتقال در جهت منفی و اگر $k < 0$ باشد، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

نکته: با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$، می‌توان نمودار تابع $f(x)+k$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازهٔ $|k|$ واحد در امتداد محور yها به‌دست آورد. اگر $k > 0$ باشد انتقال در جهت مثبت و اگر $k < 0$ باشد انتقال در جهت منفی خواهد بود.

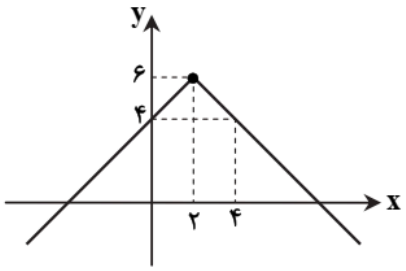
نمودار تابع $f(x)$ را با بازه‌بندی عبارات داخل قدرمطلق رسم می‌کنیم:

$$x = 0 \ , \ x-4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

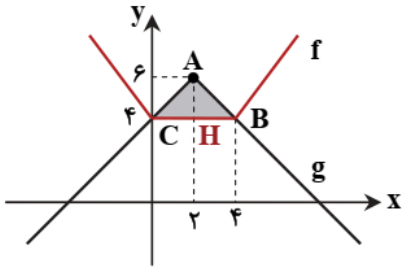
$$\left.\begin{array}{l} x < 0 \Rightarrow |x| = -x \ , \ |x-4| = -x+4 \Rightarrow y_1 = -2x+4 \\ 0 \leq x \leq 4 \Rightarrow |x| = x \ , \ |x-4| = -x+4 \Rightarrow y_2 = 4 \\ x > 4 \Rightarrow |x| = x \ , \ |x-4| = x-4 \Rightarrow y_3 = 2x-4 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -2x+4 & ; x < 0 \\ 4 & ; 0 \leq x \leq 4 \\ 2x-4 & ; x > 4 \end{cases}$$



نمودار تابع $g(x)$ را با انتقال نمودار تابع $y = -|x|$ رسم می‌کنیم. برای این کار نمودار $y = -|x|$ را ۲ واحد به‌سمت راست و ۶ واحد به‌سمت بالا انتقال می‌دهیم:



اکنون با رسم نمودار هر دو تابع در یک دستگاه مختصات داریم:



$$A(2,6) \ , \ H(2,4) \Rightarrow AH = 2$$

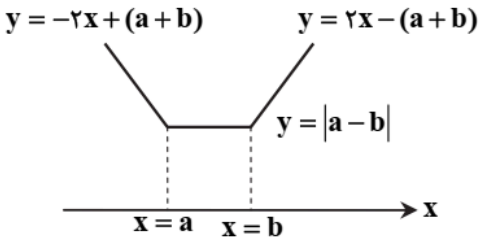
$$B(4,4) \ , \ C(0,4) \Rightarrow BC = 4$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AH \times BC = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$$

راه‌حل دیگر (برای رسم نمودار تابع $f(x)$):

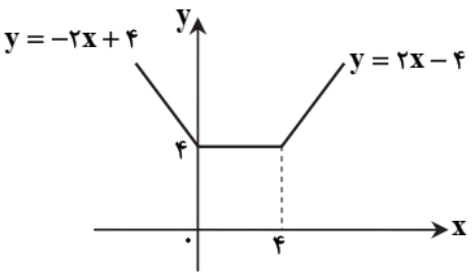
نکته: نمودار تابع $f(x) = |x-a| + |x-b|$ به نمودار تابع گلدانی معروف است.

با فرض $a < b$ نمودار تابع به‌صورت مقابل است:



$$f(x) = |x| - |x-4| \xrightarrow{\text{نمودار } f}$$

$x=0$ $x=4$



۱۵۳ نکتهٔ ۱: دامنهٔ تابع مرکب gof مجموعه xهایی است که هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کنند:

۱) x در دامنهٔ f قرار داشته باشد. ۲) $f(x)$ در دامنهٔ g قرار داشته باشد.

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

نکتهٔ ۲: اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از مجموعهٔ A $(A \subseteq D_f)$ که $x_1 < x_2$، داشته باشیم $f(x_1) > f(x_2)$، آنگاه f را تابعی اکیداً نزولی می‌نامیم.

ابتدا دامنهٔ تابع g با ضابطهٔ $y = 2\sqrt{1-x} - 3$ را به‌دست می‌آوریم:

$$1 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow D_g = (-\infty, 1]$$

همچنین با توجه به نمودار تابع f، $D_f = [-4, 3]$، پس دامنهٔ تابع مرکب gof برابر است با:

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{-4 \leq x \leq 3 \mid f(x) \leq 1\}$$

برای حال نامعادلهٔ $f(x) \leq 1$ توجه کنید که $f(0) = 1$ و f تابعی اکیداً نزولی است، پس:

$$f(x) \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq f(0) \Rightarrow x \geq 0$$

بنابراین دامنهٔ gof برابر است با:

$$D_{gof} = \{-4 \leq x \leq 3 \mid x \geq 0\} = [0, 3]$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۴ نکته: برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f، در معادلهٔ $y = f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x، $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

ابتدا سعی می‌کنیم x را برحسب y محاسبه کنیم:

$$y = \frac{x^2 - 8x + 20}{4} \Rightarrow 4y = x^2 - 8x + 20 \Rightarrow 4y = (x-4)^2 + 4$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 = 4y - 4 \Rightarrow \sqrt{(x-4)^2} = \sqrt{4y-4} \Rightarrow |x-4| = 2\sqrt{y-1}$$

با توجه به اینکه در صورت سؤال x کوچک‌تر یا مساوی ۴ ذکر شده است، پس:

$$-(x-4) = 2\sqrt{y-1} \Rightarrow x - 4 = -2\sqrt{y-1} \Rightarrow x = 4 - 2\sqrt{y-1}$$

بنابراین ضابطهٔ تابع f^{-1} به‌صورت $y = 4 - 2\sqrt{x-1}$ است، یعنی $a = -2$، $b = -1$ و $c = 4$، پس: $abc = 8$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۵ نکته: برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f، در معادلهٔ $y=f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x، $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(x)+k$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را $|k|$ واحد در امتداد محور عرض‌ها انتقال دهیم. اگر $k>0$ باشد، انتقال در جهت مثبت و اگر $k<0$ باشد، انتقال در جهت منفی خواهد بود.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(x+k)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را $|k|$ واحد در امتداد محور طول‌ها انتقال دهیم. اگر $k>0$ باشد، انتقال در جهت منفی و اگر $k<0$ باشد، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

نکته: اگر f تابعی وارون‌پذیر و f^{-1} وارون آن باشد، همواره داریم:

$$\begin{cases} f(f^{-1}(x))=x;x\in D_{f^{-1}} \\ f^{-1}(f(x))=x;x\in D_f \end{cases}$$

ابتدا وارون g را به‌دست می‌آوریم:

$$g(x)=3+f(2+x)\Rightarrow y=3+f(2+x)\Rightarrow y-3=f(2+x)\Rightarrow f^{-1}(y-3)=f^{-1}(f(2+x))$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y-3)=2+x\Rightarrow x=f^{-1}(y-3)-2\Rightarrow g^{-1}(x)=f^{-1}(x-3)-2$$

پس برای رسم $g^{-1}(x)$، کافی است نمودار f^{-1} را سه واحد به‌سمت راست و ۲ واحد به‌سمت پایین انتقال دهیم.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۶ نکته: تابعی مانند f را که برد آن تنها شامل یک عضو است، تابع ثابت می‌نامیم. اگر این عضو را k بنامیم، تابع ثابت را معمولاً با معادلهٔ $f(x)=k$ نمایش می‌دهیم.

نکته: اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو از دامنهٔ تابع دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، تابع را همانی می‌نامند. اگر دامنهٔ تابع همانی را $\mathbb{R}$ در نظر بگیریم، نمودار آن همان خط $y=x$ است که با معادلهٔ $f(x)=x$ هم نمایش داده می‌شود.

تابع f ثابت است. اگر ضابطهٔ آن $f(x)=k$ باشد، داریم:

$$f(x)=\frac{ax+2b+3}{2-3x}=k\Rightarrow ax+2b+3=2k-3kx\Rightarrow \begin{cases} a=-3k\ (1) \\ 2b+3=2k\Rightarrow 2b=2k-3\ (2) \end{cases}$$

از طرفی تابع g همانی است، پس ضابطهٔ آن به‌صورت $g(x)=x$ است؛ بنابراین:

$$g(x)=(a+2b)x+c=x\Rightarrow \begin{cases} a+2b=1\ (3) \\ c=0 \end{cases}$$

$$(1),(2),(3)\Rightarrow (-3k)+(2k-3)=1\Rightarrow -k-3=1\Rightarrow k=-4\Rightarrow a=12\ ,\ b=-\frac{11}{2}$$

با توجه به مقادیر به دست آمده، $f(x)=-4$ است و خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$f(ac)+4g(b)=f(0)+4g(-\frac{11}{2})=-4+4(-\frac{11}{2})=-4-22=-26$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۷

نکته : $(fog)(x)=f(g(x))$

نکته : $(a,b)\in f \Leftrightarrow (b,a)\in f^{-1}$

فرض می‌کنیم f تابعی با ضابطهٔ $f(x)=ax+b$ باشد که با توجه به شکل $a<0$ است. طبق فرض سؤال داریم:

$$(fof)(x)=4x-4 \Rightarrow f(f(x))=4x-4 \xrightarrow{f(x)=ax+b} f(ax+b)=4x-4$$

$$a(ax+b)+b=a^2x+ab+b=4x-4 \Rightarrow \begin{cases} a^2=4 \Rightarrow a=\pm 2 \xrightarrow{a<0} a=-2 \ (*) \\ ab+b=-4 \xrightarrow{(*)} -2b+b=-4 \Rightarrow b=4 \end{cases}$$

بنابراین $f(x)=-2x+4$.

اکنون خواستهٔ مسئله را به‌دست می‌آوریم:

$$f^{-1}(6)=x \Rightarrow f(x)=6 \Rightarrow -2x+4=6 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow f^{-1}(6)=-1$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۸

نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(x+k)$، کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را $|k|$ واحد در امتداد محور طول‌ها انتقال دهیم. اگر $k>0$ باشد، انتقال در جهت منفی و اگر $k<0$ باشد، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(x)+k$، کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را $|k|$ واحد در امتداد محور عرض‌ها انتقال دهیم. اگر $k>0$ باشد، انتقال در جهت مثبت و اگر $k<0$ باشد، انتقال در جهت منفی خواهد بود.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y=-f(x)$، کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(-x)$، کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم.

ابتدا نمودار تابع را سه واحد به بالا و دو واحد به چپ انتقال داده‌ایم، پس ضابطهٔ تابع جدید به‌صورت زیر است:

$$y=x-\frac{2}{x} \xrightarrow{y+3} y=x-\frac{2}{x}+3 \xrightarrow{x\to x+2} y=x+2-\frac{2}{x+2}+3 \Rightarrow y=x-\frac{2}{x+2}+5$$

اکنون نمودار تابع را نسبت به محور طول‌ها و سپس نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع نسبت به مبدأ مختصات قرینه شود:

$$y=x-\frac{2}{x+2}+5 \xrightarrow[y\to -y]{x\to -x} -y=-x-\frac{2}{-x+2}+5 \Rightarrow y=x+\frac{2}{-x+2}-5$$

در آخر ضابطهٔ به دست آمده را با ضابطهٔ $y=x$ برابر قرار می‌دهیم:

$$x+\frac{2}{2-x}-5=x \Rightarrow \frac{2}{2-x}-5=0 \Rightarrow \frac{2}{2-x}=5 \Rightarrow 2=10-5x \Rightarrow x=\frac{8}{5}=1/6$$

بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۹

نکته: $(a,b)\in f \Leftrightarrow (b,a)\in f^{-1}$

نکته: مجموع دو تابع اکیداً صعودی، یک تابع اکیداً صعودی است.

ابتدا داریم:

$$f(x)=(1+\sqrt{x-1})^2=1+2\sqrt{x-1}+x-1=x+2\sqrt{x-1}$$

توابع $y=x$ و $y=2\sqrt{x-1}$ اکیداً صعودی هستند، پس مجموع آن‌ها نیز اکیداً صعودی و در نتیجه تابع f اکیداً صعودی است.

می‌دانیم محل برخورد یک تابع اکیداً صعودی با وارون خود (در صورت برخورد) روی خط $y=x$ است. پس معادلهٔ $f(x)=x$ را حل می‌کنیم تا α را به‌دست آوریم:

$$f(x)=x \Rightarrow x+2\sqrt{x-1}=x \Rightarrow 2\sqrt{x-1}=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \alpha=1$$
$$\Rightarrow f(\alpha)=f(1)=1 \Rightarrow 4f(\alpha)=4f(1)=4$$

خواستهٔ سؤال $f^{-1}(4f(\alpha))$ است، پس باید $f^{-1}(4)$ را به‌دست آوریم. داریم:

$$f^{-1}(4)=k \Rightarrow f(k)=4 \Rightarrow (1+\sqrt{k-1})^2=4 \Rightarrow \begin{cases} 1+\sqrt{k-1}=2 \Rightarrow \sqrt{k-1}=1 \Rightarrow k=2 \Rightarrow f^{-1}(4)=2 \\ 1+\sqrt{k-1}=-2 \text{ غیرممکن} \end{cases}$$

بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۰

نکته: رأس سهمی $y=a(x-x_S)^2+y_S$، نقطهٔ $S(x_S,y_S)$ است. $(a\neq 0)$

نکته: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)\ ,\ D_{f+g}=D_f\cap D_g$

ابتدا معادلهٔ سهمی y را می‌نویسیم: $S(2,0)\Rightarrow y=a(x-2)^2+0 \xrightarrow{(0,4)\in y} 4=a(0-2)^2 \Rightarrow a=1 \Rightarrow y=(x-2)^2=x^2-4x+4$

اکنون داریم: $y=x^2-4x+4=x^2+2f(x) \Rightarrow -4x+4=2f(x) \Rightarrow f(x)=-2x+2$

با توجه به اینکه $D_{f+g}=\{0,-1\}$ است، $f(0)$ و $f(-1)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=-2x+2 \Rightarrow \begin{cases} f(0)=2 \\ f(-1)=4 \end{cases}$$

حال داریم:

$$(f+g)(0)=f(0)+g(0) \Rightarrow 1=2+g(0) \Rightarrow g(0)=-1\ ,\ (f+g)(-1)=f(-1)+g(-1) \Rightarrow 2=4+g(-1) \Rightarrow g(-1)=-2$$

پس خواستهٔ سؤال برابر است با: $g(g(0))=g(-1)=-2$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۱ نکته: تابع fog را تابع مرکب می‌نامیم و داریم: $(fog)(x)=f(g(x))$

راه‌حل اول: ابتدا معادلهٔ $(fog)(x)=۴$ را تشکیل داده و سپس آن را حل می‌کنیم.

$$(fog)(x)=۴ \Rightarrow f(۵x+۳)=۴ \Rightarrow ۴(۵x+۳)^۲-۸(۵x+۳)+۷=۴ \Rightarrow ۴(۲۵x^۲+۳۰x+۹)-۸(۵x+۳)+۷=۴$$

$$\Rightarrow ۱۰۰x^۲+۱۲۰x+۳۶-۴۰x-۲۴+۳=۰ \Rightarrow ۱۰۰x^۲+۸۰x+۱۵=۰ \Rightarrow ۲۰x^۲+۱۶x+۳=۰$$

$$\Rightarrow x=\frac{-۱۶\pm\sqrt{۲۵۶-۲۴۰}}{۲\times۲۰}=\frac{-۱۶\pm۴}{۴۰}=-\frac{۱}{۲},-\frac{۳}{۱۰}$$

بنابراین قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها برابر است با:

$$\left|-\frac{۱}{۲}-(-\frac{۳}{۱۰})\right|=\left|-\frac{۵}{۱۰}+\frac{۳}{۱۰}\right|=\frac{۲}{۱۰}=\frac{۱}{۵}$$

راه‌حل دوم: معادله را در دو مرحله حل می‌کنیم:

$$(fog)(x)=۴ \Rightarrow f(g)=۴ \Rightarrow ۴g^۲-۸g+۷=۴ \Rightarrow ۴g^۲-۸g+۳=۰ \Rightarrow (۲g-۳)(۲g-۱)=۰ \Rightarrow g=\frac{۳}{۲} \text{ یا } g=\frac{۱}{۲}$$

$$\begin{cases} g=\frac{۳}{۲} \Rightarrow ۵x+۳=\frac{۳}{۲} \Rightarrow ۵x=-\frac{۳}{۲} \Rightarrow x=-\frac{۳}{۱۰} \\ g=\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۵x+۳=\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۵x=-\frac{۵}{۲} \Rightarrow x=-\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

پس قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها برابر $\frac{۱}{۵}$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۲ نکته: برای رسم نمودار $y=kf(x)$، کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را در راستای عمودی k برابر کنیم، پس دامنهٔ این تابع برابر دامنهٔ $f(x)$ است.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(-x)$ کافی است، نمودار تابع $f(x)$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم.

دامنهٔ تابع $y=f(۴x+۱)$ با دامنهٔ تابع $y=f(۴x+۱)+۳$ یکسان است، پس دامنهٔ تابع $y=f(۴x+۱)$ برابر $(۳,+\infty)$ است. با تبدیل x به $-x$ در ضابطهٔ این تابع، نمودار تابع نسبت به محور عرض‌ها قرینه شده و دامنهٔ آن به $(-\infty,-۳)$ تغییر می‌یابد. پس دامنهٔ تابع $y=f(۴(-x)+۱)$ برابر $(-\infty,-۳)$ و در نتیجه دامنهٔ تابع $y=۲f(۱-۴x)$ برابر $(-\infty,-۳)$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۳ نکته: فرض کنیم تابع f وارون‌پذیر باشد، در این‌صورت اگر $f(a)=b$، آنگاه $f^{-۱}(b)=a$.

با توجه به شکل، نقاط $(۰,۲)$ و $(-۲,۰)$ بر روی تابع $y=f(۴x+۱)$ واقع هستند، پس مختصات آن‌ها در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند:

$$\begin{cases} y=f(۴x+۱) \xrightarrow[y=۲]{x=۰} ۲=f(۱) \Rightarrow f^{-۱}(۲)=۱ \\ y=f(۴x+۱) \xrightarrow[y=۰]{x=-۲} ۰=f(-۷) \Rightarrow f^{-۱}(۰)=-۷ \end{cases}$$

بنابراین: $f^{-۱}(۰)+f^{-۱}(۲)=-۷+۱=-۶$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۴ نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(x+k)$، کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را $|k|$ واحد در امتداد محور طول‌ها انتقال دهیم. اگر $k>0$ باشد، انتقال در جهت منفی و اگر $k<0$ باشد، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(x)+k$، کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را $|k|$ واحد در امتداد محور عرض‌ها انتقال دهیم. اگر $k>0$ باشد، انتقال در جهت مثبت و اگر $k<0$ باشد، انتقال در جهت منفی خواهد بود.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(-x)$، کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم.

نکته: $(a,b)\in f \Leftrightarrow (b,a)\in f^{-1}$

مراحل انتقال را به‌ترتیب انجام می‌دهیم تا ضابطهٔ تابع g به‌دست آید:

$$f(x)=\sqrt{2x+3a} \xrightarrow{x\to x-a} y=\sqrt{2(x-a)+3a}=\sqrt{2x+a} \xrightarrow{x\to -x} y=\sqrt{-2x+a}$$

$$\xrightarrow{x\to \frac{x}{2}} y=\sqrt{-x+a} \xrightarrow{y-a} g(x)=\sqrt{-x+a}-a$$

اکنون داریم:

$$g^{-1}(a)=-3a \Rightarrow g(-3a)=a \Rightarrow \sqrt{3a+a}-a=a \Rightarrow \sqrt{4a}=2a \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4a=4a^2 \xrightarrow{a\neq 0} a=1$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۵ نکته: $(a,b)\in f \Leftrightarrow (b,a)\in f^{-1}$

با توجه به فرض سؤال داریم:

$$(g^{-1}of^{-1})(0)=\alpha \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(0))=\alpha \Rightarrow g(\alpha)=f^{-1}(0)$$

اگر $f^{-1}(0)=k$ باشد، پس $f(k)=0$ و داریم:

$$f(x)=\log_2(3x-8) \Rightarrow f(k)=\log_2(3k-8)=0 \Rightarrow 3k-8=1 \Rightarrow 3k=9 \Rightarrow k=3$$

پس داریم:

$$f^{-1}(0)=3 \Rightarrow g(\alpha)=3$$

$$g(x)=x+\sqrt{x+3} \xrightarrow{g(\alpha)=3} \alpha+\sqrt{\alpha+3}=3 \Rightarrow \sqrt{\alpha+3}=3-\alpha$$

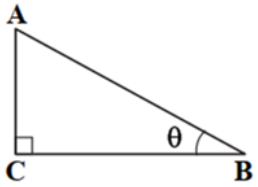
$$\Rightarrow \alpha+3=9-6\alpha+\alpha^2 \Rightarrow \alpha^2-7\alpha+6=0 \Rightarrow \begin{cases}\alpha=1 \ \checkmark\\ \alpha=6 \ \times \text{ (در معادله صدق نمی‌کند.)}\end{cases}$$

بنابراین گزینهٔ ۱ درست است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۶ نکته: اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو از دامنهٔ تابع دقیقاً به همان عضو از برد تابع نظیر شود، تابع را همانی گوییم. اگر دامنهٔ تابع همانی $\mathbb{R}$ باشد، ضابطهٔ آن $f(x)=x$ است.

نکته: در مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل روبه‌رو داریم:

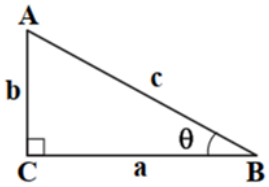


$$\sin\theta=\frac{AC}{AB} \qquad \cos\theta=\frac{BC}{AB}$$
$$\tan\theta=\frac{AC}{BC} \qquad \cot\theta=\frac{BC}{AC}$$

طبق فرض تابع f همانی است، پس داریم:

$$(۴,a)\in f \Rightarrow a=۴$$
$$(b,a-۱)\in f \Rightarrow b=a-۱ \xrightarrow{a=۴} b=۳$$
$$(۲c,۲a+b-۱)\in f \Rightarrow ۲c=۲a+b-۱ \xrightarrow[b=۳]{a=۴} c=۵$$

بنابراین در مثلث ABC داریم:



$$\sin\theta=\frac{AC}{AB}=\frac{b}{c}=\frac{۳}{۵}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

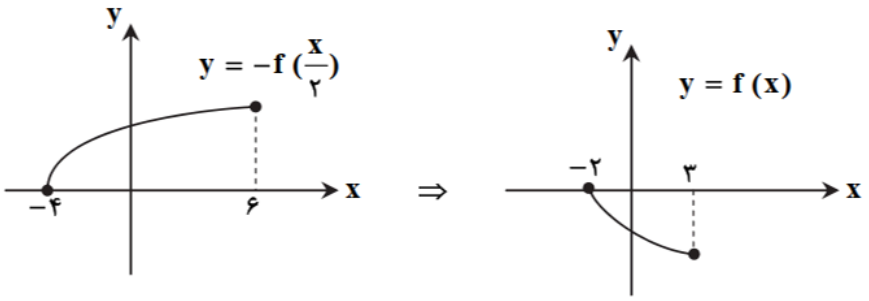
۱۶۷ نکته: برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{۱}{k}$ ضرب کنیم.

نکته: برای رسم نمودار تابع $y=-f(x)$، کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم.

نکته: اگر $x_۱,x_۲\in D_f$ و f تابعی اکیداً نزولی باشد، آنگاه: $f(x_۱)\le f(x_۲) \Rightarrow x_۱\ge x_۲$

ابتدا نمودار تابع f را از روی نمودار تابع $y=-f(\frac{x}{۲})$ رسم می‌کنیم.

برای این کار طول نقاط را نصف کرده و نمودار را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم:



مشاهده می‌شود f تابعی اکیداً نزولی با دامنهٔ $D_f=[-۲,۳]$ است؛ بنابراین:

$$f(۲x-۱)\le f(۵-x) \xrightarrow{f\text{اکیداً نزولی}} ۲x-۱\ge ۵-x \Rightarrow ۳x\ge ۶ \Rightarrow x\ge ۲ \quad (۱)$$

$$D_f=[-۲,۳] \Rightarrow \begin{cases} -۲\le ۲x-۱\le ۳ \Rightarrow -۱\le ۲x\le ۴ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}\le x\le ۲ & (۲) \\ -۲\le ۵-x\le ۳ \Rightarrow -۷\le -x\le -۲ \Rightarrow ۲\le x\le ۷ & (۳) \end{cases}$$

$$(۱)\cap(۲)\cap(۳) \Rightarrow x=۲$$

پس فقط $x=۲$ در نامعادلهٔ فوق صدق می‌کند و مجموعه جواب نامعادله شامل یک عدد صحیح است.

بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۸ ضابطهٔ تابع f را به‌صورت $f(x)=ax+b$ در نظر می‌گیریم. اکنون مقادیر a و b را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(۲)=-۱ \Rightarrow ۲a+b=-۱ \\ f(-۳)=۴ \Rightarrow -۳a+b=۴ \end{cases}$$

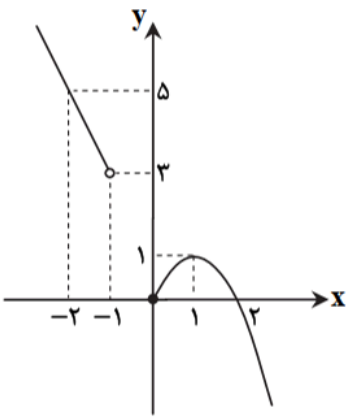
اکنون با حل دستگاه $\begin{cases} ۲a+b=-۱ \\ -۳a+b=۴ \end{cases}$ نتیجه می‌گیریم $a=-۱$ و $b=۱$. پس ضابطهٔ تابع f به‌صورت $f(x)=-x+۱$ است و خواهیم داشت:

$$f(f(۰))=f(۱)=۰$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۹ ابتدا نمودار تابع قطعه‌ای داده‌شده را رسم می‌کنیم. سپس از روی نمودار، برد تابع را به‌دست می‌آوریم.

تابع در محدودهٔ $x\geq ۰$ یک سهمی با رأس $(۱,۱)$ است که از مبدأ می‌گذرد و در محدودهٔ $x<-۱$ یک خط با شیب -۲ است که از نقطهٔ $(-۱,۳)$ شروع می‌شود.



با توجه به نمودار، برد تابع، مجموعهٔ $(-\infty,۱]\cup(۳,+\infty)$ یا $\mathbb{R}-(۱,۳]$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۰ نکته: اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو از دامنهٔ تابع دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، تابع را همانی می‌نامند. اگر دامنهٔ تابع همانی $\mathbb{R}$ باشد، نمودار آن خط $y=x$ است.

نکته: تابعی مانند f را که برد آن تنها شامل یک عضو است، تابع ثابت می‌نامیم. اگر این عضو را k بنامیم، تابع ثابت را با معادلهٔ $f(x)=k$ نمایش می‌دهیم:

$$(k\in\mathbb{R})$$

با توجه به نکات و فرض سؤال داریم:

$$\text{تابع } f \text{ همانی است.} \Rightarrow \begin{cases} x^۲-۷=۲ \Rightarrow x^۲=۹ \Rightarrow x=\pm ۳ \\ x^۲-۳x=۰ \Rightarrow x(x-۳)=۰ \Rightarrow x=۰,\ x=۳ \end{cases} \xrightarrow{\cap} x=۳$$

$$\text{تابع } g \text{ ثابت است.} \Rightarrow g=\{(۴,y),(۷,x^۲)\} \Rightarrow y=x^۲ \Rightarrow y=۹$$

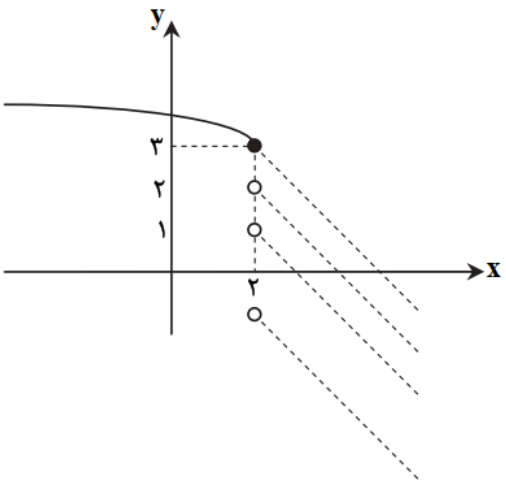
بنابراین:

$$x+y=۱۲$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۱ **نکته: اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 روی $\mathbb{R}$ که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) > f(x_2)$، آنگاه f را روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی می‌نامیم.**

تابع $y = \sqrt{8 - 2x} + 1$ با دامنهٔ $(-\infty, 2]$ مطابق شکل روبه‌رو یک تابع اکیداً نزولی است. برای آنکه تابع f نیز اکیداً نزولی باشد، می‌بایست اولاً $y = kx + 9$ خطی با شیب منفی باشد (تا این قسمت تابع نیز اکیداً نزولی باشد) ثانیاً باید نمودار این تابع در $x = 2$ از نقطه‌ای پایین‌تر یا روی نقطهٔ $(2,3)$ شروع شود، پس:



$$\left.\begin{array}{l} k < 0 \\ 2k + 9 \le 3 \Rightarrow 2k \le -6 \Rightarrow k \le -3 \end{array}\right\} \Rightarrow k \le -3$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۲ **پله اول:** ابتدا تابع $f(x)$ را ساده می‌کنیم. طبق اتحاد مکعب دو جمله ای داریم: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)^3$

پله دوم: عبارت $7 + 2\sqrt{12}$ را با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای به‌صورت مربع کامل می‌نویسیم.

$$7 + 2\sqrt{12} = 4 + 2 \times 2 \times \sqrt{3} + 3 = (2)^2 + 2(2)(\sqrt{3}) + (\sqrt{3})^2 = (2 + \sqrt{3})^2$$

پله سوم: $f\left(\sqrt{7 + 2\sqrt{12}}\right)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f\left(\sqrt{7 + 2\sqrt{12}}\right) = f\left(\sqrt{(2 + \sqrt{3})^2}\right) = f(2 + \sqrt{3}) = (2 + \sqrt{3} - 2)^3 = 3\sqrt{3}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۳ ابتدا ضابطهٔ نمودار داده شده در شکل صورت سوال را ساده می‌کنیم:

$$y = f(x) - xg(x) = ax + b - x(x^2 - 6x + c)$$
$$= -x^3 + 6x^2 + (a - c)x + b$$

پس نمودار صورت سوال از انتقال و قرینه‌یابی نمودار x^3 به‌دست آمده است. بنابراین با توجه به قوانین انتقال، این نمودار مربوط به $y = 3 - (x-2)^3$ است:

$$y = 3 - (x-2)^3 = -x^3 + 6x^2 - 12x + 11$$

با مقایسهٔ این ضابطه با ضابطهٔ $y = -x^3 + 6x^2 + (a - c)x + b$ خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} a - c = -12 \\ b = 11 \end{array}\right. \Rightarrow a + b - c = (a - c) + b = -12 + 11 = -1$$

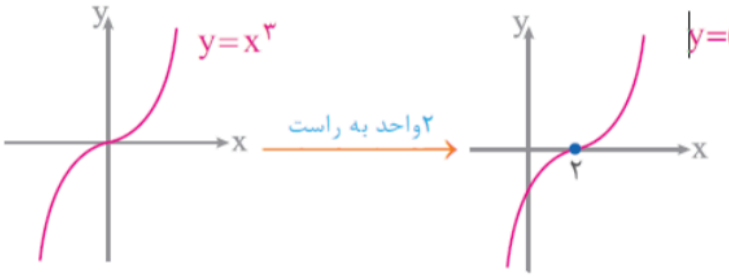
(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۴ تبدیل‌های خواسته شده را به ترتیب انجام می‌دهیم:

$$y=(x-1)^3 \xrightarrow{\text{۳ واحد به چپ}} y=(x+3-1)^3=(x+2)^3$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} y=-(-x+2)^3=(x-2)^3$$

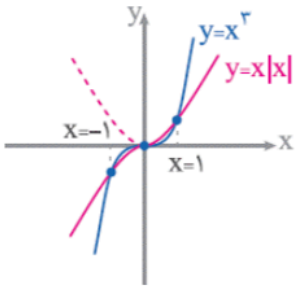
حال برای رسم $y=(x-2)^3$ نمودار $y=x^3$ را ۲ واحد به راست منتقل می‌کنیم:



با توجه به نمودار، تابع از ناحیه دوم دستگاه مختصات عبور نمی‌کند.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۵ ابتدا تابع $y=x|x|$ را به ازای ریشهٔ عبارت داخل قدرمطلق به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:



$$\Rightarrow \cdots \quad y=x|x|=\begin{cases} x^2 & ;x\geq 0 \\ -x^2 & x<0 \end{cases}$$

سپس هر دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

با توجه به نمودارها، دو تابع در سه نقطه با هم برخورد می‌کند.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۶ ابتدا ضابطهٔ نمودار داده شده در شکل صورت سوال را ساده می‌کنیم:

$$y=f(x)-xg(x)=ax+b-x(x^2-6x+c)$$

$$=-x^3+6x^2+(a-c)x+b$$

پس نمودار صورت سوال از انتقال و قرینه‌یابی نمودار x^3 به‌دست آمده است. بنابراین با توجه به قوانین انتقال، این نمودار مربوط به $y=3-(x-2)^3$ است:

$$y=3-(x-2)^3=-x^3+6x^2-12x+11$$

با مقایسهٔ این ضابطه با ضابطهٔ $y=-x^3+6x^2+(a-c)x+b$ خواهیم داشت:

$$\begin{matrix} a-c=-12 \\ b=11 \end{matrix} \Rightarrow a+b-c=(a-c)+b=-12+11=-1$$

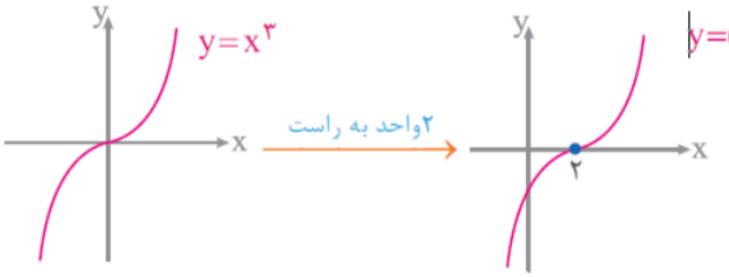
(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۷ تبدیل‌های خواسته شده را به ترتیب انجام می‌دهیم:

$$y=(x-1)^3 \xrightarrow{\text{۳ واحد به چپ}} y=(x+3-1)^3=(x+2)^3$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} y=-(-x+2)^3=(x-2)^3$$

حال برای رسم $y=(x-2)^3$ نمودار $y=x^3$ را ۲ واحد به راست منتقل می‌کنیم:

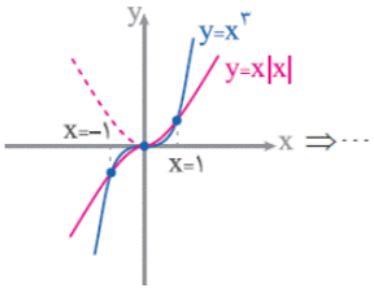


با توجه به نمودار، تابع از ناحیه دوم دستگاه مختصات عبور نمی‌کند.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۸ ابتدا تابع $y=x|x|$ را به ازای ریشهٔ عبارت داخل قدرمطلق به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y=x|x|=\begin{cases}x^2 & ;x\geq 0\\ -x^2 & x<0\end{cases}$$



سپس هر دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

با توجه به نمودارها، دو تابع در سه نقطه با هم برخورد می‌کند.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۹ با توجه به نمودار صورت سؤال $f(x)=\frac{3}{2}x-3$ و $g(x)=\begin{cases}2x-1 & ;x\geq 1\\ x & ;x<1\end{cases}$ است، پس برای پیدا کردن $f^{-1}(-2)$ باید $f(x)$ را برابر ۲- قرار دهیم:

$$\frac{3}{2}x-3=-2\Rightarrow x=\frac{2}{3}\Rightarrow f^{-1}(-2)=\frac{2}{3}$$

برای پیدا کردن $g^{-1}(3)$ باید ضابطهٔ بالایی را برابر ۳ قرار دهیم و برای پیدا کردن $g^{-1}(-2)$ باید ضابطهٔ پایینی را برابر ۲- بگذاریم:

$$(1)\ 2x-1=3\Rightarrow 2x=4\Rightarrow x=2\Rightarrow g^{-1}(3)=2$$

$$(2)\ x=-2\Rightarrow g^{-1}(-2)=-2\Rightarrow \frac{g^{-1}(3)\times g^{-1}(-2)}{f^{-1}(-2)}=\frac{2\times(-2)}{\frac{2}{3}}=-6$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸۰

$$f(x)=\frac{۱}{x}\xrightarrow[\text{به‌راست}]{\text{۱واحد}}y=\frac{۱}{x-۱}\xrightarrow[\text{محورxها}]{\text{قرینه‌نسبت‌به}}y=-\frac{۱}{x-۱}$$

$$\xrightarrow[\text{به‌پایین}]{\text{۲واحد}}y=-۲-\frac{۱}{x-۱}=\frac{-۲x+۱}{x-۱}$$

حال نقطهٔ برخورد این منحنی را با نمودار تابع f پیدا می‌کنیم:

$$\frac{-۲x+۱}{x-۱}=\frac{۱}{x}\Rightarrow -۲x^{۲}+x=x-۱\Rightarrow x^{۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

پس این نمودارها در دو نقطهٔ $A\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}},\sqrt{۲}\right)$ و $B\left(-\frac{۱}{\sqrt{۲}},-\sqrt{۲}\right)$ متقاطع‌اند و فاصلهٔ هر یک از آن‌ها از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OA=OB=\sqrt{\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)^{۲}+(\sqrt{۲})^{۲}}=\sqrt{\frac{۱}{۲}+۲}=\sqrt{\frac{۵}{۲}}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸۱

ابتدا بازهٔ x را مشخص می‌کنیم:

$$[x-۲]=۱\Rightarrow [x]-۲=۱\Rightarrow [x]=۳\Rightarrow ۳\le x<۴$$

در بازهٔ $۳\le x<۴$ ضابطهٔ f برابر است با:

$$f(x)=|\overbrace{x-۳}^{+}|-|\overbrace{x-۴}^{-}|=(x-۳)+(x-۴)=۲x-۷$$

حال نقاط تلاقی f و g را در بازهٔ $[۳,۴)$ مشخص می‌کنیم:

$$g(x)=f(x)\Rightarrow ۲x^{۲}+x-۱۷=۲x-۷\Rightarrow ۲x^{۲}-x-۱۰=۰\Rightarrow (۲x-۵)(x+۲)=۰\Rightarrow x=-۲,x=\frac{۵}{۲}$$

با توجه به بازهٔ x، جواب‌های به دست آمده، قابل قبول نیستند.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸۲

مقادیر تابع را یک بار به‌ازای xهای صحیح و یک بار به‌ازای xهای غیرصحیح به دست می‌آوریم:

۱- اگر $x\in\mathbb{Z}$ باشد، عبارت $x-[x]$ و $[x]+[-x]$ برابر صفر است، پس $f(x)=۰$ است.

۲- اگر $x\notin\mathbb{Z}$ ، عبارت $[x]+[-x]=-۱$ است، پس $f(x)=x-[x]+۱$ می‌شود. از طرفی در $x\notin\mathbb{Z}$ داریم:

$$۰<x-[x]<۱\Rightarrow ۱<x-[x]+۱<۲$$

بنابراین برد تابع f به‌صورت بازهٔ $(۱,۲)\cup\{۰\}$ است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸۳ ابتدا تابع $y=x|x|$ را به ازای ریشهٔ عبارت داخل قدرمطلق به صورت دو ضابطه ای می نویسیم:

$$y=x|x|=\begin{cases}x^2 & ;x\geq 0\\ -x^2 & ;x<0\end{cases}$$

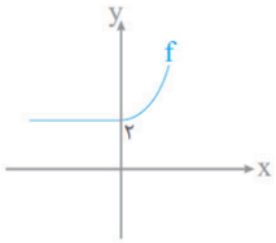
سپس هر دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می کنیم:



با توجه به نمودار دو تابع مشخص است که در بازهٔ $(-1,0)\cup(1,+\infty)$ نمودار $y=x^3$ بالای نمودار $y=x|x|$ قرار می گیرد.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸۴ ابتدا ضابطهٔ f را ساده می کنیم و سپس نمودار تابع f را رسم می کنیم:

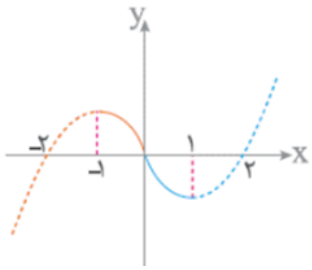


$$f(x)=\begin{cases}2x^3+2 & ;x>0\\ 2 & ;x\leq 0\end{cases}$$

می دانیم تابع ثابت، تابعی هم صعودی و هم نزولی اســت، بنابراین تابع $f(x)$ در بازهٔ $(-\infty,0]$ تابعی ثابت و در نتیجه در این بازه هم صعودی و هم نزولی است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸۵ نمودار تابع f به صورت زیر رسم می کنیم:



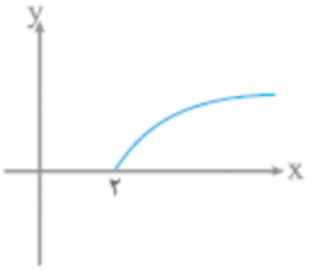
$$f(x)=\begin{cases}x^2-2x & ;x\geq 0\\ -x^2-2x & ;x<0\end{cases}$$

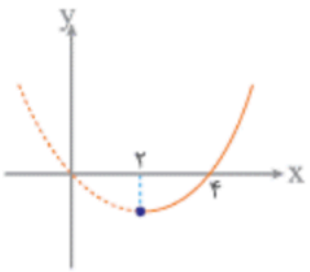
بــا توجــه به نمودار، بزرگ ترین بازه ای که نمودار در آن اکیداً نزولی اســت، بازهٔ $(-1,1)$ اســت. پس بیشترین مقدار $b-a$ برابر $1-(-1)=2$ است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸۶ ابتدا دامنهٔ تابع f را به دست می آوریم. چون $x-2$ زیر رادیکال با فرجهٔ ۲ قرار دارد. پس: $x-2\geq 0\Rightarrow x\geq 2$

از طرفی تابع f از مجموع دو تابع $y_1=\sqrt{x-2}$ و $y_2=x^2-4x$ تشــکیل شــده که هر دوی آن ها در بازهٔ $[2,+\infty)$ اکیداً صعودی هستند:





پس تابع f که از جمع دو تابع اکیداً صعودی به وجود آمده نیز تابعی اکیداً صعودی است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

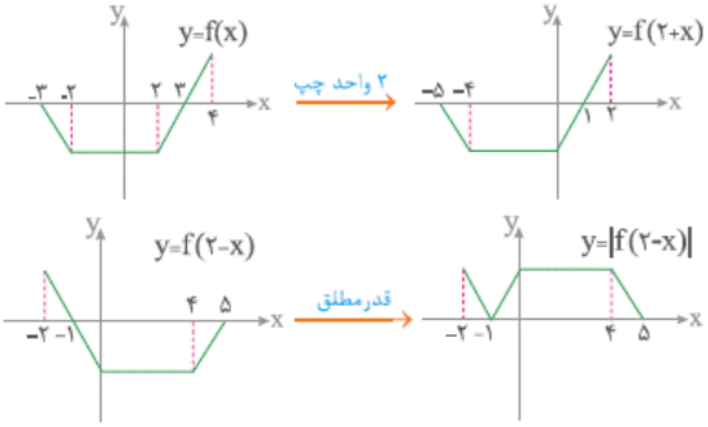
۱۸۷ چون تابع $y=۲^{x}$ اکیداً صعودی است، پس قرینهٔ آن نسبت به محور yها یعنی $y=۲^{-x}$ اکیداً نزولی است. بنابراین $y=۱+۲^{-x}$ نیز اکیداً نزولی است. حال چون $y=۱+۲^{-x}$ همواره مثبت است، پس $y=\frac{۱}{۱+۲^{-x}}$ اکیداً صعودی است. بنابراین تابع f نیز اکیداً صعودی است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸۸ با توجه به صورت سؤال، تابع f تابعی اکیداً صعودی است. از طرفی انبساط و انقباض افقی وضعیت یکنوایی را تغییر نمی دهد. پس $f(۲x)$ نیز اکیداً صعودی است. اما تابع $-۲f(۲x)$ اکیداً نزولی بوده و انتقال در راستای قائم وضعیت یکنوایی تابع را تغییر نمی دهد. بنابراین تابع g اکیداً نزولی است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸۹ نمودار تابع $y=|f(۲-x)|$ را رسم می کنیم:



بنابراین تابع $y=|f(۲-x)|$ در بازهٔ $(-۱,۴)$ صعودی است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۹۰ جدول تعیین علامت g به صورت زیر است.

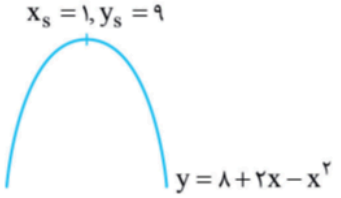
x		۰		۳	
$-x^{۲}$	−	۰	−		−
f(x)	+		+	۰	−
g(x)	−	‖	−		+

$\Rightarrow D_g=\{۰\}\cup[۳,+\infty)$

بنابراین دامنهٔ این تابع شامل دو عدد طبیعی $x=۱,۲$ نیست.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۹۱



$$۸+۲x-x^{۲}\le ۹$$
$$\Rightarrow ۰\le\sqrt{۸+۲x-x^{۲}}\le ۳$$
$$\xrightarrow{+۲}\Rightarrow ۲\le f(x)\le ۵$$

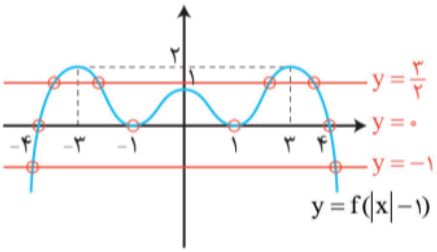
پس برد f بازه $[۲,۵]$ است. برد fof همان برد تابع f در بازه $[۲,۵]$ است. اما با توجه به دامنه f، $۸+۲x-x^{۲}\ge ۰$ که $-۲\le x\le ۴$ است، باید برد $۲\le x\le ۴$: $f(x)=۲+\sqrt{۸+۲x-x^{۲}}$ را بیابیم. چون رأس سهمی در این بازه نیست پس تابع در این بازه اکیداً یکنوا و البته پیوسته است.

$$f(۴)=۲\Rightarrow \text{fof برد}=[۲,۲+\sqrt{۸}]\Rightarrow[\text{fof}]\text{برد}=\{۲,۳,۴\}\quad \text{و}\quad f(۲)=۲+\sqrt{۸}$$

(ماروال ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۹۲ با توجه به نمودار مقدار f در ۲- و ۰ و ۳، صفر است. پس در معادلهٔ $f(2f(|x|-1))$ باید حاصل $f(2f(|x|-1))$ یکی از اعداد ۲- و ۰ و ۳ باشد، یعنی:

$$f(|x|-1)=-1 \text{ یا } 0 \text{ یا } \frac{3}{2}$$



حالا نمودار $y=f(|x|-1)$ را رسم می‌کنیم: f را یک واحد به راست می‌بریم، سپس x های منفی را حذف می‌کنیم و سمت راست را روی سمت چپ آیینه می‌کنیم؛ که می‌بینیم $f(|x|-1)$، ده بار مقادیر ۱- و ۰ و $\frac{3}{2}$ را می‌گیرد، یعنی معادله ده ریشه دارد.

(ماروں ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۹۳ ابتدا $f(2x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(2x)=\frac{4x+1}{2x-1}$$

با توجه به رابطه $f(2x)$ داریم:

$$f(x)=\frac{2x+1}{x-1}\Rightarrow f(x).x-f(x)=2x+1\Rightarrow \overbrace{f(x).x-2x}^{x(f(x)-2)}=1+f(x)\Rightarrow x=\frac{1+f(x)}{f(x)-2}$$

با جایگذاری x در ضابطه $f(2x)$ داریم:

$$f(2x)=\frac{4(\frac{1+f(x)}{f(x)-2})+1}{2(\frac{1+f(x)}{f(x)-2})-1}=\frac{\frac{4+4f(x)+f(x)-2}{f(x)-2}}{\frac{2+2f(x)-f(x)+2}{f(x)-2}}=\frac{5f(x)+2}{f(x)+4}$$

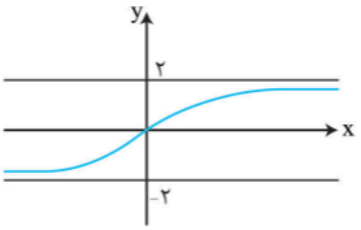
(ماروں ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۹۴

$$f(x)=x\Rightarrow \frac{|x|+1}{2}[g(x)]=x\Rightarrow [g(x)]=\frac{2x}{|x|+1}$$

نمودار تابع $y=\frac{2x}{|x|+1}$ را رسم می‌کنیم:

$$y=\begin{cases}\frac{2x}{x+1} & x\geq 0\\ \frac{2x}{-x+1} & x<0\end{cases}$$



با توجه به شکل:

$$[g(x)]=-1\Rightarrow \frac{2x}{|x|+1}=-1\xrightarrow{x<0}\frac{2x}{-x+1}=-1\Rightarrow x=-1$$

$$[g(x)]=0\Rightarrow \frac{2x}{|x|+1}=0\Rightarrow x=0$$

$$[g(x)]=1\Rightarrow \frac{2x}{|x|+1}=1\Rightarrow x=1$$

(ماروں ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۹۵ برای دامنه fog داریم:

$$D_{fog}=\{x \mid x\in D_g, g(x)\in D_f\}$$

پس داریم:

$$D_g=[۲,۴]$$

$$D_f: x^۲-۲x>۰ \Rightarrow x<۰ \text{ یا } x>۲$$

۱) $x\in[-۲,۴]$

۲) $g(x)\in D_f \Rightarrow g(x)>۲$

با توجه به اینکه تابع g در هر قسمت خطی است، نتیجه می‌گیریم $g(\frac{۷}{۲})=۲$ و $g(\frac{۱}{۲})=۲$ است، بنابراین $\frac{۱}{۲}<x<\frac{۷}{۲}$.

حال با اشتراک گرفتن از بازه‌های به دست آمده، به بازه $(\frac{۱}{۲},\frac{۷}{۲})$ می‌رسیم. خواسته سؤال را حساب می‌کنیم: $\frac{۷}{۲}-\frac{۱}{۲}=۳$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۹۶

$$g(x)=f(۲x-[x])=۲x-[x]+[-(۲x-[x])]=۲x-[x]+[-۲x+\underbrace{[x]}_{\text{خارج می‌شود}}]=۲x+[-۲x]$$

$$g(f(x))=۲f(x)+[-۲f(x)]=۲(x+[-x])+[-۲(x+[-x])]=۲x+۲[-x]+[-۲\underbrace{-۲[-x]}_{\text{خارج می‌شود}}]=۲x+[-۲x]$$

$$f(g(f(x)))=۲x+[-۲x]+[-۲x-\underbrace{[-۲x]}_{\text{میاد بیرون}}]=۲x+[۰-۲x]$$

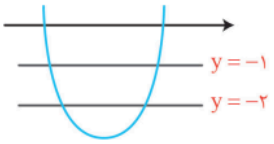
طبق تعریف $[-x]$ داریم:

$$y=\begin{cases}۲x-[۲x]=۱ & , \quad ۲x\notin\mathbb{Z}\\ ۰ & , \quad ۲x\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

در ضابطه بالا $۲x-[۲x]$ همیشه بین ۰ و ۱ است و اگر یکی کم شود در فاصله $(-۱,۰)$ قرار دارد چون $۲x$ صحیح نیست. در ضابطه پایین هم جواب صفر است پس در اجتماع جواب برد می‌شود $[-۱,۰)$.

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۹۷ نمودار تابع خطهای $y=-۱$ و $y=-۲$ را در ۴ نقطه قطع می‌کند.



بنابراین عرض رأس سهمی بین ۲- و ۳- است.

$$-۳<-\frac{\Delta}{۴a}<-۲ \rightarrow -۳<-\frac{\Delta}{۴}<-۲ \xrightarrow{\times -۴} ۸<\Delta<۱۲ \rightarrow$$

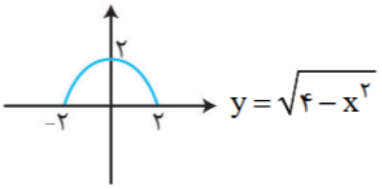
$$۸<b^۲-۴<۱۲ \xrightarrow{+۴} ۱۲<b^۲<۱۶ \xrightarrow{\sqrt{}} ۲\sqrt{۳}<|b|<۴ \rightarrow$$

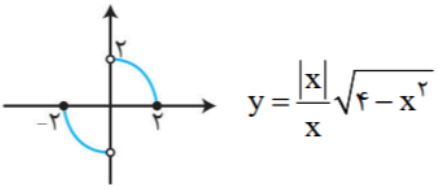
$$b\in(۲\sqrt{۳},۴) \text{ یا } b\in(-۴,-۲\sqrt{۳})$$

$$[b]=۳ \quad , \quad [b]=-۴$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۹۸





برای $x\neq ۰$ و $x\neq \pm ۲$ این تابع نسبت به $y=x$ متقارن و بنابراین وارون خودش است. پس $fof(x)=x$ و داریم: $f(fof(x))=f(x)$

که در بردش فقط ۲ عدد صحیح ± ۱ را دارد.

دقت کنید که به ازای $x=\pm ۲$، تابع fof تشکیل نمی‌شود.

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۹۹ ابتدا ضابطهٔ تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f\left(\frac{۱}{x}\right)=\frac{۱}{x}+۱\rightarrow f(x)=x+۱,x\neq ۰$$

$$fog(۳)=۲\rightarrow f\big(g(۳)\big)=۲\rightarrow g(۳)+۱=۲\rightarrow g(۳)=۱$$

$$fog(۱)=۰\rightarrow f\big(g(۱)\big)=۰\rightarrow f\big(g(۱)\big)=g(۱)+۱=۰\rightarrow g(۱)=-۱$$

در نتیجه: $$gog(۳)=g\big(g(۳)\big)=g(۱)=-۱$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰۰ صورت چی میگه؟ بهترین کار اینه که $g\left(f^{-۱}(a)\right)$ رو بسازید و ببینید چه شکلیه! بعدش باید یه معادله حل کنید و تمام ....

$$g\left(f^{-۱}(a)\right)=-۱\rightarrow ۲^{f^{-۱}(a)}+۲^{-f^{-۱}(a)}-۳=-۱\xrightarrow{f^{-۱}(a)=t>۰}t+\frac{۱}{t}=۲\xrightarrow{\times t}t^۲-۲t+۱=۰$$

$$(t-۱)^۲=۰\rightarrow t=۱=۲^{f^{-۱}(a)}\rightarrow f^{-۱}(a)=۰\rightarrow f(۰)=a$$

مقدار تابع $f(x)$ را در $x=۰$ به‌دست می‌آوریم:

$$f(۰)=۲-\log_{۴}^{۲}=a\rightarrow ۲-\log_{۲^۲}^{۲}=a\rightarrow ۲-\frac{۱}{۲}=a\rightarrow a=\frac{۳}{۲}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰۱ می‌دانیم $۰\leq x-[x]<۱$ و $[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & ,x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & ,x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ است، پس داریم:

$$\begin{cases}x\in\mathbb{Z}\rightarrow g(x)=۰\rightarrow f\big(g(x)\big)=f(۰)=۰\\ x\notin\mathbb{Z}\rightarrow g(x)=-۱\rightarrow f\big(g(x)\big)=f(-۱)=۰\end{cases}\rightarrow (fog)(x)=۰$$

$$\begin{cases}x\in\mathbb{Z}\rightarrow f(x)=۰\rightarrow g\big(f(x)\big)=g(۰)=۰\\ x\notin\mathbb{Z}\rightarrow f(x)=a\xrightarrow{۰<a<۱}g\big(f(x)\big)=g(a)=-۱\end{cases}\rightarrow (gof)(x)=\begin{cases}۰ & ,x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & ,x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

بنابراین: $$(fog)(x)+(gof)(x)=\begin{cases}۰ & ,x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & ,x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$



پس تابع داده شده تابعی غیریکنوا است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰۲ **صورت چی میگه؟** اگه یه تابعی یکنوای اکید باشه برای محاسبه بردش کافیه اول و آخر دامنه رو بذارید توی تابع و محدوده برد رو به‌دست بیارید. بعدش ببینید در نامعادلهٔ صورت سوال، ۲ و ۱ خروجی f در چه xهایی بودن؟

با توجه به داده های مسئله تابع f را رسم می کنیم:

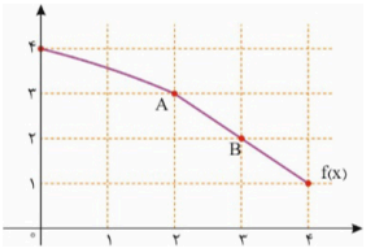
$$D_f=[0,4]\Rightarrow 0\le x\le 4, R_f=[1,4]\Rightarrow 1\le y\le 4 \xrightarrow{f\ \text{اکیداً نزولی}} f(0)=4, f(4)=1$$

تابع f اکیداً نزولی است پس شیب خطوط مماس بر تابع f در تمام دامنه اش، منفی است.

$$f(2)=3\Rightarrow A(2,3), A\in f$$

$$f^{-1}(2)=3\rightarrow f(3)=2\Rightarrow B(3,2), B\in f$$

تابع اکیداً نزولی $f(x)$ را به‌صورت تقریبی رسم می‌کنیم.



به‌دست آوردن حدود x با استفاده از نامعادله $1\le fof(x)\le 2$:

$$\Rightarrow 1\le f\big(f(x)\big)\le 2\Rightarrow 3\le f(x)\le 4\Rightarrow 0\le x\le 2$$

پس مجموعه جواب شامل ۳ عدد صحیح ۰ و ۱ و ۲ است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰۳ می‌دانیم $[-x]+[x]$ به‌ازای xهای صحیح برابر صفر و به‌ازای xهای غیر صحیح برابر ۱- است، پس دو حالت برای مقادیر x در نظر می گیریم:

$$x\in\mathbb{Z}: g\big(f(x)\big)=g(0)=4$$

$$x\notin\mathbb{Z}: g\big(f(x)\big)=g(-1)=3$$

پس به ازای تمام x های غیرصحیح تابع gof برابر ۳ است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰۴ با توجه به نمودار، $f(0)=0$ و $f(2)=0$ است. پس برای حل معادلهٔ $f\big(f(x)\big)=0$ باید $f(x)=0$ یا $f(x)=2$ باشد.

(۱) $f(x)=0\Rightarrow \begin{cases} x=0\\ x=2\end{cases}$ (۲) $f(x)=2\Rightarrow x=1$

پس این معادله دارای ۳ جواب است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰۵ با توجه به شکل صورت سؤال، f تابع خطی با ضابطهٔ $f(x)=x+2$ و دامنهٔ $[-2,1]$ است، پس:

$$D_{fof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_f\}=\{-2\le x\le 1 \mid -2\le f(x)\le 1\}$$

حال نامعادلهٔ $-2\le f(x)\le 1$ را حل می‌کنیم:

$$-2\le x+2\le 1\Rightarrow -4\le x\le -1$$

از اشتراک بازه‌های به دست آمده نتیجه می‌شود $D_{fof}=[-2,-1]$ است که شامل ۲ عدد صحیح می‌باشد.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰۶ با توجه به شکل، طول رأس سهمی یا همان معادلهٔ محور تقارن $x=0$ می‌باشد، پس:

$$x_s=0, x_s=\frac{-b}{2a}\Rightarrow b=0\Rightarrow m+2=0\Rightarrow \underline{m=-2}$$

با $m=-2$ ضابطهٔ $f(x)$ را می‌نویسیم.

$$\Rightarrow f(x)=-2x^2+18\Rightarrow y_A=18 \quad \text{(ارتفاع مثلث)}$$

ریشه های معادله $f(x)=0$ که محل برخورد نمودار با محور xها هستند (طول نقاط B و C) را به‌دست می‌آوریم.

$$f(x)=0\Rightarrow -2x^2+18=0\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x=+3 \quad \text{یا} \quad x=-3$$

$$\Rightarrow x_B=-3, x_C=+3$$

با داشتن عرض نقطهٔ A و طول نقاط B و C، ارتفاع و قاعدهٔ مثلث ABC را داریم پس می‌توان مساحت آن را حساب کرد.

$$BC=x_C-x_B=3-(-3)=6, OA=18\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}(OA)(BC)=\frac{1}{2}\times 18\times 6=54$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰۷

$$g(f(a))=-1\rightarrow 2^{f(a)}+2^{-f(a)}-3=-1\xrightarrow{f(a)=t>0}t+\frac{1}{t}=2\xrightarrow{\times t}t^2-2t+1=0$$

$$(t-1)^2=0\rightarrow t=1=2^{f(a)}\rightarrow f(a)=0$$

$$f(a)=2-\log_4^{(2-x)}=0\Rightarrow \log_4^{(2-x)}=2\Rightarrow 2-x=16\Rightarrow x=-14$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰۸ صورت‌چی‌میگه؟ مثل سوال قبلی اول برید fog و gof روجداگونه بسازید تا این دوتا زبون بسته تکلیف یکنواییشون معلوم شه!

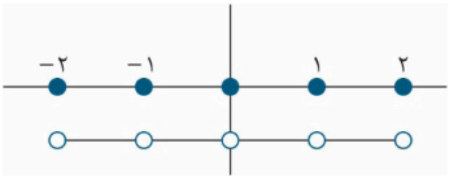
با توجه به این نکته که عدد صحیح داخل جزء صحیح می تواند از آن خارج شود، ابتدا ضابطهٔ $(fog)(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(fog)(x)=f\big(g(x)\big)=g(x)-[g(x)]$$

$$(fog)(x)=[x]+[-x]-\big[[x]+[-x]\big]=[x]+[-x]-[x]-[-x]=0$$

ضابطهٔ $(gof)(x)$ را به‌دست می آوریم:

$$(gof)(x)=g\big(f(x)\big)=[f(x)]+[-f(x)]=\Big[x-\underbrace{[x]}_{\in Z}\Big]+\Big[\underbrace{[x]}_{\in Z}-x\Big]=\cancel{[x]}-\cancel{[x]}+[x]+[-x]=[x]+[-x]$$



$$(fog)(x)+(gof)(x)=0+[x]+[-x]=[x]+[-x]=\begin{cases}0 & ;x\in Z\\ -1 & ;x\notin Z\end{cases}$$

پس تابع داده شده تابعی غیریکنوا است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰۹ می‌دانیم $[x]+[-x]$ به‌ازای xهای صحیح برابر صفر و به‌ازای xهای غیر صحیح برابر ۱- است، پس دو حالت برای مقادیر x در نظر می گیریم:

$$x\in\mathbb{Z}: g\big(f(x)\big)=g(0)=4$$

$$x\notin\mathbb{Z}: g\big(f(x)\big)=g(-1)=3$$

پس نمودار تابع gof همواره بالای خط $y=2$ قرار دارد.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱۰ در تابع g به جای همهٔ xها، $f(x)$ قرار می‌دهیم: $g(f(x))=(f(x))^۲+۶f(x)$

از طرفی در صورت سؤال $g(f(x))=x^۲-۹$ است، بنابراین:

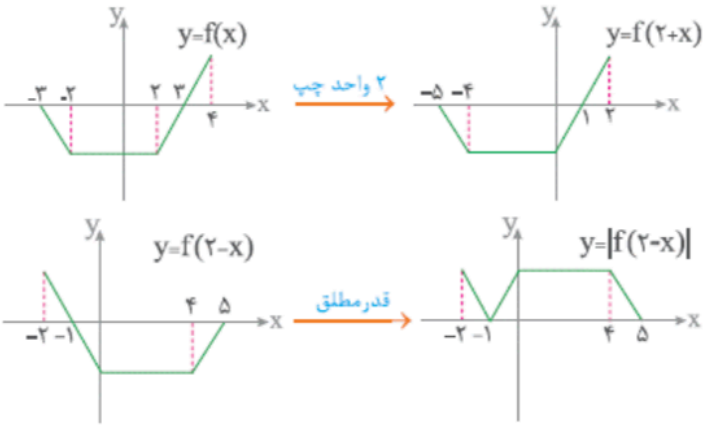
$$(f(x))^۲+۶f(x)=x^۲-۹\Rightarrow(f(x))^۲+۶f(x)+۹=x^۲\Rightarrow(f(x)+۳)^۲=x^۲\Rightarrow\begin{cases}f(x)+۳=x\Rightarrow f(x)=x-۳ & \checkmark\\ f(x)+۳=-x\Rightarrow f(x)=-x-۳ & \times\end{cases}$$

پس داریم:

$$f(g(x))=x^۲+۶x-۳\quad\text{محور تقارن}:\ x=-\frac{b}{۲a}=\frac{-۶}{۲}=-۳$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱۱ نمودار تابع $y=|f(۲-x)|$ را رسم می‌کنیم:



بنابراین تابع $y=|f(۲-x)|$ در بازهٔ $(-۱,۴)$ صعودی است. پس مساحت آن در این بازه برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}\times۱\times۲+۴\times۲=۹$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱۲ عبارت زیر رادیکال باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد: $-x^۲f(x)\geq۰$

جدول تعیین علامت g به صورت زیر است.

x		۰		۳	
$-x^۲$	−	۰	−		−
$f(x)$	+		+	۰	−
$\sqrt{-x^۲f(x)}$	−	۰	−	۰	+

$$\Rightarrow D_g=[۳,+\infty)\cup\{۰\}$$

بنابراین دامنهٔ این تابع شامل دو عدد طبیعی $x=۱,۲$ نیست.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱۳ **صورت چی میگه؟** بهترین کار اینه که $g\left(f^{-1}(a)\right)$ رو بسازید و ببینید چه شکلیه! بعدش باید یه معادله حل کنید و تمام ....

$$g\left(f^{-1}(a)\right)=-1\rightarrow 2^{f^{-1}(a)}+2^{-f^{-1}(a)}-3=-1\xrightarrow{2^{f^{-1}(a)}=t}t+\frac{1}{t}=2\xrightarrow{\times t}t^2-2t+1=0$$

$$(t-1)^2=0\rightarrow t=1=2^{f^{-1}(a)}\rightarrow f^{-1}(a)=0\rightarrow f(0)=a$$

مقدار تابع $f(x)$ را در $x=0$ به‌دست می‌آوریم:

$$f(0)=2-\log_4^2=a\rightarrow 2-\log_{2^2}^2=a\rightarrow 2-\frac{1}{2}=a\rightarrow a=\frac{3}{2}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱۴ **صورت چی میگه؟** بچه ها یادتونه دامنه و برد f چه ربطی به دامنه و برد f^{-1} داشت!؟ آفرین! برعکس هم بودن. یعنی دامنه این میشه برد اون و دامنه اون میشه برد این!

با استفاده از ضابطهٔ $f^{-1}(x)$ می توان دامنه و برد آن را حساب کرد:

$$f^{-1}(x)=\frac{5x-3}{bx+4}\Rightarrow D_{f^{-1}}=\mathbb{R}-\left\{\frac{-4}{b}\right\},R_{f^{-1}}=\mathbb{R}-\left\{\frac{5}{b}\right\}$$

می دانیم $D_{f^{-1}}=R_f$ و $R_{f^{-1}}=D_f$ پس :

$$D_{f^{-1}}=\mathbb{R}-\{-2\},R_{f^{-1}}=\mathbb{R}-\{a\}$$

با مساوی قرار دادن رابطهٔ بالا a و b به‌دست می آید.

$$\frac{-4}{b}=-2\Rightarrow -2b=-4\Rightarrow \boxed{b=2}\Rightarrow \frac{5}{2}=a\Rightarrow ab=\frac{5}{2}\times 2=5$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱۵ **تک پله:** زمانی که ترکیب دو تابع برابر همانی شد یعنی یکی وارون دیگری است و می‌دانیم وارون یک تابع هموگرافیک مانند $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ برابر $y^{-1}=\frac{-dx+b}{cx-a}$ می‌باشد. حال داریم:

$$f(x)=\frac{2x}{x+n}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-nx}{x-2}\rightarrow\xrightarrow{(fog)(x)=x}f^{-1}(x)=g(x)\Rightarrow\frac{-nx}{x-2}=\frac{m-nx}{x-2}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱۶ تک پله: ابتدا ضابطهٔ تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+1\rightarrow f(x)=x+1,x\neq 0$$

$$fog(3)=2\rightarrow f\left(g(3)\right)=2\rightarrow f\left(g(3)\right)=g(3)+1=2\rightarrow g(3)=1$$

$$fog(1)=0\rightarrow f\left(g(1)\right)=0\rightarrow f\left(g(1)\right)=g(1)+1=0\rightarrow g(1)=-1$$

در نتیجه:

$$gog(3)=g\left(g(3)\right)=g(1)=-1$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱۷ می‌دانیم در تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ اگر $a+d=0$ باشد در این صورت $f^{-1}(x)=f(x)$ است. از طرفی $f^{-1}\left(f(x)\right)=x$ است، بنابراین داریم:

$$f^{-1}\left(f(f(4))\right)=f\left(\underbrace{f^{-1}\left(f(4)\right)}_{4}\right)=f(4)=\frac{6}{7}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱۸ با توجه به نمودار ضابطهٔ تابع $f(x)$ و $g(x)$ به‌صورت زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}-x+۲ & x\geq ۰\\ -۲x+۲ & x<۰\end{cases} \quad \text{و} \quad g(x)=-۲x-۲$$

ابتدا $g^{-۱}\left(\frac{۱}{۲}\right)$ را پیدا می‌کنیم.

$$g(x)=-۲x-۲=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=-\frac{۵}{۴}\Rightarrow g^{-۱}\left(\frac{۱}{۲}\right)=-\frac{۵}{۴}$$

$$f^{-۱}\left(g^{-۱}\left(\frac{۱}{۲}\right)\right)=f^{-۱}\left(-\frac{۵}{۴}\right)\xrightarrow{\text{ضابطه بالایی}}-x+۲=-\frac{۵}{۴}\Rightarrow -x=-\frac{۱۳}{۴}\Rightarrow x=\frac{۱۳}{۴}\Rightarrow f^{-۱}\left(-\frac{۵}{۴}\right)=\frac{۱۳}{۴}$$

حالا سراغ محاسبهٔ مخرج کسر می‌رویم:

$$f(۲)-g(۲)=۰-(-۶)\Rightarrow \frac{f^{-۱}\left(g^{-۱}\left(\frac{۱}{۲}\right)\right)}{(f-g)(۲)}=\frac{\frac{۱۳}{۴}}{۶}=\frac{۱۳}{۲۴}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱۹ چون می‌دانیم $f(۵)=۳$ است، پس با جای‌گذاری $x=۳$ در رابطهٔ داده شده، داریم:

$$x=۳: ۲f(۵)=f(۴)+۳\Rightarrow ۶=f(۴)+۳\Rightarrow f(۴)=۳$$

حالا در رابطهٔ داده شده یک بار $x=۲$ و یک بار هم $x=۱$ قرار می‌دهیم:

$$x=۲: ۲f(۴)=f(۳)+۲\Rightarrow ۶=f(۳)+۲\Rightarrow f(۳)=۴$$

$$x=۱: ۲f(۳)=f(۲)+۱\Rightarrow ۸=f(۲)+۱\Rightarrow f(۲)=۷$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۰ **شرط تساوی دو تابع f و g :** ۱) دامنهٔ دو تابع با هم برابر باشد. ۲) به ازای همهٔ عضوهای دامنه، مقدار دو تابع یکسان شود.

بررسی الف:

$$D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R} - \left\{x = \frac{k\pi}{۲}\right\}$$

$D_f \neq D_g \rightarrow$ مساوی نیستند g و f

بررسی ب :

$$f(x) = \log\frac{x-۲}{x} \rightarrow D_f : \frac{x-۲}{x} > ۰ \rightarrow D_f = (-\infty, ۰) \cup (۲, +\infty)$$

$$g(x) = \log(x-۲) - \log x \rightarrow D_g : \begin{cases} x-۲>۰ \rightarrow x>۲ \\ x>۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x>۲$$

$D_f \neq D_g \rightarrow$ مساوی نیستند g,f

بررسی پ:

$$f(x) = \left[x^۲\right] \rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = [x]^۲ \rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$f(x) \neq g(x) \xrightarrow[x=-\frac{۱}{۲}]{\text{به‌طور مثال}} \begin{cases} f(x) = \left[\left(-\frac{۱}{۲}\right)^۲\right] = \left[\frac{۱}{۴}\right] = ۰ \\ g(x) = \left[-\frac{۱}{۲}\right]^۲ = (-۱)^۲ = ۱ \end{cases} \rightarrow f \neq g$$

پس f و g مساوی نیستند.

بنابراین هیچ یک از جفت تابع‌ها مساوی نیستند.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۱ توان ۴ در عبارت داریم بنابراین:

$$\begin{cases} \frac{m^۲-۱}{۲} \leq ۴ \Rightarrow m^۲ - ۱ \leq ۸ \Rightarrow m^۲ \leq ۹ \Rightarrow |m| \leq ۳ \Rightarrow -۳ \leq m \leq ۳ \xrightarrow[\text{و نامنفی}]{m \in \mathbb{Z}} \{۰,۱,۲,۳\} \\ m+۱ \leq ۴ \Rightarrow m \leq ۳ \xrightarrow[\text{و نامنفی}]{m \in \mathbb{Z}} \{۰,۱,۲,۳\} \end{cases}$$

$$\text{if } m=۰ \Rightarrow y = x^{-\frac{۱}{۲}} + x - ۲x^۴ + ۲ \Rightarrow \text{دارای توان غیر صحیح} \Rightarrow \text{غ ق ق}$$

$$\text{if } m=۱ \Rightarrow y = x^۰ + x^۲ - ۲x^۴ + ۲ \Rightarrow y = -۲x^۴ + x^۲ + ۳ \quad \checkmark$$

$$\text{if } m=۲ \Rightarrow y = x^{\frac{۳}{۲}} + x^۳ - ۲x^۴ + ۲ \Rightarrow \text{دارای توان غیر صحیح} \Rightarrow \text{غ ق ق}$$

$$\text{if } m=۳ \Rightarrow y = x^۴ + x^۴ - ۲x^۴ + ۲ \Rightarrow y = ۲ \text{ تابع ثابت} \Rightarrow \text{غ ق ق}$$

$m=۱$ قابل قبول است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۲

طبق نمودار $\Rightarrow f(x)=a(x-۲)^۳+۸$

$(۰,۰)\xrightarrow{\text{جایگذاری نقطهٔ}}۰=a(۰-۲)^۳+۸\Rightarrow -۸a=-۸\Rightarrow a=۱$

$f(x)=(x-۲)^۳+۸$

$g(x)=f(x)-f(x+۲)\Rightarrow g(x)=(x-۲)^۳+۸-\left((x+۲-۲)^۳+۸\right)$

$\Rightarrow g(x)=(x-۲)^۳-x^۳\Rightarrow g(x)=x^۳-۶x^۲+۱۲x-۸-x^۳\Rightarrow g(x)=-۶x^۲+۱۲x-۸\to\Delta<۰$

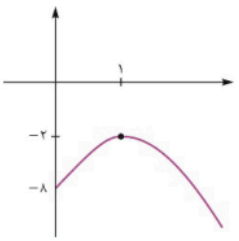
$D_{f(x)}=[۰,+\infty)\Rightarrow D_{g(x)}=D_{f(x)}\cap D_{f(x+۲)}$

$\Rightarrow D_g=[۰,+\infty)\cap[-۲,+\infty)$

$\Rightarrow D_g=[۰,+\infty)$

$g(x)$ رأس سهمی $\Rightarrow \frac{-b}{۲a}=\frac{-۱۲}{-۱۲}=۱\to g(۱)=-۲$

بنابراین نمودار $g(x)$ به‌صورت مقابل است.



(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۳

با توجه به تابع $f(x)$ ، دامنه‌ی این تابع گویا به‌صورت $D_f=\mathbb{R}-\{۲\}$ خواهد بود. اما با توجه به بُرد داده شـــده، دامنه به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$f(x)=\frac{x^۳-۴x}{x-۲}=\frac{x(x^۲-۴)}{x-۲}=\frac{x\cancel{(x-۲)}(x+۲)}{\cancel{(x-۲)}}=x^۲+۲x$

$x^۲+۲x=۸\Rightarrow x^۲+۲x-۸=۰\Rightarrow (x+۴)(x-۲)=۰\Rightarrow \begin{cases}x=۲\\x=-۴\end{cases}$

$\Rightarrow D_f=R-\{-۴,۲\}\Rightarrow a=-۴,b=۲$

$f(x)=x^۲+۲x$ نقطه‌ی رأس سهمی $x_s=-۱\Rightarrow f(-۱)=۱-۲=-۱$

بنابراین برد تابع $f(x)$ به‌صورت $R_f=[-۱,+\infty)-\{۸\}$ تعریف می‌شود.

$\Rightarrow c=-۱$

$\Rightarrow a+b+c=-۴+۲-۱=-۳$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۴ فرض می‌کنیم $g(x)=۲^x$ و $h(x)=\sqrt{x-۱}-\sqrt{x-۲}$ است. در این صورت:

$$h(x)=\sqrt{x-۱}-\sqrt{x-۲}\times\frac{\sqrt{x-۱}+\sqrt{x-۲}}{\sqrt{x-۱}+\sqrt{x-۲}}=\frac{(x-۱)-(x-۲)}{\sqrt{x-۱}+\sqrt{x-۲}}$$

$$\Rightarrow h(x)=\frac{۱}{\sqrt{x-۱}+\sqrt{x-۲}}$$

مجموع دو تابع اکیداً صعودی، اکیداً صعودی است. بنابراین تابع $y=\sqrt{x-۱}+\sqrt{x-۲}$ اکیداً صعودی است در نتیجه تابع $h(x)$، اکیداً نزولی است و تابع $g(x)$ اکیداً صعودی است.

$$h(x)=\sqrt{x-۱}-\sqrt{x-۲}\Rightarrow D_{h(x)}=\begin{cases}x\geq ۱\\ x\geq ۲\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}[۲,+\infty)$$

$$\xrightarrow{h(x)\text{اکیداً نزولی}}R_{h(x)}=\big(h(+\infty),h(۲)\big]=(۰,۱]$$

$$f(x)=g\big(h(x)\big)\Rightarrow R_f=\left(۲^{۰},۲^{۱}\right]=(۱,۲]$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=۱\\ b=۲\end{cases}\Rightarrow ab=۲$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۵

$$D_f=\begin{cases}۴-x^۲\geq ۰\Rightarrow x^۲\leq ۴\Rightarrow |x|\leq ۲\Rightarrow -۲\leq x\leq ۲\\ x^۲-۴\geq ۰\Rightarrow x^۲\geq ۴\Rightarrow |x|\geq ۲\Rightarrow\begin{cases}x\geq ۲\\ x\leq -۲\end{cases}\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}D_f=\{\pm ۲\}\to R_f=\{۰\}$$

$$\xrightarrow[d=-۲]{a=۲}g(x)=\begin{cases}\sqrt{(c-۱)x} & ,x=۲\Rightarrow\sqrt{۲(c-۱)}=۰\Rightarrow c-۱=۰\Rightarrow c=۱\\ x^۲+۲x+b & ,x=-۲\Rightarrow ۴-۴+b=۰\Rightarrow b=۰\end{cases}$$

$$a=۲\qquad d=-۲$$

$$\frac{۲a+c}{d+b}=\frac{۴+۱}{۰-۲}=\frac{-۵}{۲}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۶ ابتدا ضابطهٔ تابع $f(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x^۲+۶\sqrt{x^۲-۹}}=\sqrt{(x^۲-۹)+۶\sqrt{x^۲-۹}+۹}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{x^۲-۹}+۳)^۲}=\left|\sqrt{x^۲-۹}+۳\right|=\sqrt{x^۲-۹}+۳$$

$$f(x)+g(x)=\sqrt{x^۲-۹}+۳+۳-\sqrt{x^۲-۹}=۶$$

پس برد تابع $f(x)+g(x)$ شامل یک مقدار طبیعی است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۷ ابتدا ضابطهٔ تابع fg را تشکیل می‌دهیم

$$fg=(۳x+۱)\left(\frac{x}{۳}+a\right)=x^۲+\left(۳a+\frac{۱}{۳}\right)x+a$$

با توجه به اینکه سهمی رو به بالا است تابع fg در سمت راست رأس سهمی اکیداً صعودی است. بنابراین داریم:

$$\left[\frac{-b}{۲a},+\infty\right)=\left[\frac{-۱۰}{۶},+\infty\right)\rightarrow\frac{-b}{۲a}=\frac{-۱۰}{۶}$$

$$\rightarrow\frac{b}{a}=\frac{۱۰}{۳}\rightarrow\frac{۳a+\frac{۱}{۳}}{۱}=\frac{۱۰}{۳}\rightarrow ۹a+۱=۱۰\rightarrow a=۱$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۸ بهتر است ابتدا ضابطهٔ دو تابع f و fog را ساده‌تر کنیم:

$$f(x)=\frac{۲x+۱}{x+۱}=\frac{۲x+۲-۱}{x+۱}=۲-\frac{۱}{x+۱}$$

$$fog(x)=\frac{۲x}{x+۱}=\frac{۲x+۲-۲}{x+۱}=۲-\frac{۲}{x+۱}$$

حالا در تابع $f(x)$ به جای xها، تابع $g(x)$ قرار می‌دهیم و آن را با ضابطهٔ fog داده شده در صورت سوال مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{cases}f\big(g(x)\big)=۲-\dfrac{۱}{g(x)+۱}\\ f\big(g(x)\big)=۲-\dfrac{۲}{x+۱}\end{cases}\Rightarrow\frac{۱}{g(x)+۱}=\frac{۲}{x+۱}$$

$$\Rightarrow g(x)+۱=\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۲}\Rightarrow g(x)=\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲}$$

نمودار تابع g به صورت یک خط است که محور xها را در نقطهٔ A به طول یک و محور yها را درنقطهٔB به عرض $-\frac{۱}{۲}$ قطع می‌کند. پس مساحت مثلث AOB برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}(۱)\left(\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۱}{۴}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۹

$$fof(x)\geq ۰\rightarrow f\big(f(x)\big)\geq ۰$$

مقدار تابع $f(x)$ زمانی نامنفی است که ورودی‌اش بین ۰ تا ۴ باشد، پس داریم:

$$\xrightarrow{\text{باتوجه‌به‌نمودار f}}۰\leq f(x)\leq ۴\rightarrow ۰\leq x\leq ۴$$

بنابراین این بازه شامل ۵ عدد صحیح $\{۰,۱,۲,۳,۴\}$ است که مجموع آن‌ها برابر ۱۰ است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳۰

$$f\left(x-\frac{۱}{x}\right)=\frac{۱}{\frac{x^۲-۱}{x}}+\frac{x^۲-۱}{x}\rightarrow f\left(x-\frac{۱}{x}\right)=\frac{۱}{x-\frac{۱}{x}}+x-\frac{۱}{x}\Rightarrow f(x)=\frac{۱}{x}+x$$

$$f(۲)-f(-۲)=\left(\frac{۱}{۲}+۲\right)-\left(\frac{-۱}{۲}-۲\right)=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}+۲+۲=۵$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳۱ برای حل این معادله دو حالت $x \geq ۰$ یا $x < ۰$ را در نظر می‌گیریم:

$$[x]+[|x|]=x-|x|$$

$$x \geq ۰ \rightarrow [x]+[x]=x-x \rightarrow ۲[x]=۰ \qquad [x]=۰ \rightarrow ۰ \leq x < ۱ \quad \checkmark$$

یا

$$x < ۰ \rightarrow [x]+[-x]=x-(-x) \rightarrow [x]+[-x]=۲x \rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \rightarrow ۰=۲x \rightarrow x=۰ & \times \\ x \notin \mathbb{Z} \rightarrow -۱=۲x \rightarrow x=\frac{-۱}{۲} \end{cases}$$

$$\text{جواب‌ها}: [۰,۱) \cup \left\{-\frac{۱}{۲}\right\} \rightarrow \begin{cases} a=۰ \\ b=۱ \\ c=\frac{-۱}{۲} \end{cases} \qquad a+b+c=۰+۱-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳۲ ابتدا باید بازه‌ای که تابع $f(x)$ در آن اکیداً نزولی است را پیدا کنیم پس:

$$f(x)=\begin{cases} ۲x-۱۰ & ;x \geq ۳ \\ -۲x+۲ & ;-۴ \leq x < ۳ \\ ۱۰ & ;x < -۴ \end{cases} \qquad \text{اکیداً نزولی}$$

حال باید وارون $y=-۲x+۲$ را حساب کرده و با $g(x)$ برابر قرار دهیم:

$$f(x)=-۲x+۲ \rightarrow f^{-۱}(x)=-\frac{x}{۲}+۱ \qquad ;-۴ < x \leq ۱۰$$

$$f^{-۱}(x)=g(x) \rightarrow -\frac{x}{۲}+۱=x^{۲}+x+۵ \rightarrow x^{۲}+\frac{۳}{۲}x+۴=۰$$

از آنجایی که $\Delta < ۰$ است پس تقاطعی نخواهند داشت.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳۳ تابع خطی g با شیب مثبت را به‌صورت $g(x)=ax+b$ در نظر می‌گیریم. $a>۰$

چون $f^{-۱}og$ اکیداً یکنوا است می‌توان از طرفین f گرفت .

$$g(x)=f(۸x-۳)=ax+b \qquad (f^{-۱}og)(x)=۸x-۳ \xrightarrow{f} f\left(f^{-۱}og(x)\right)=f(۸x-۳)$$

حال ضابطهٔ تابع $f(x)$ را تشکیل می‌دهیم.

$$\xrightarrow{x \to \frac{x}{۸}} f(x-۳)=a\frac{x}{۸}+b \xrightarrow{x \to x+۳} f(x)=a\left(\frac{x+۳}{۸}\right)+b$$

ضابطهٔ تابع $g(f(x))$ را تشکیل داده و با $۲x+۳$ مقایسه می‌کنیم.

$$g(f(x))=a\left(\frac{a}{۸}(x+۳)+b\right)+b=۲x+۳ \rightarrow \frac{a^{۲}}{۸}x+\frac{۳}{۸}a^{۲}+ab+b=۲x+۳ \rightarrow \begin{cases} \frac{a^{۲}}{۸}=۲ \xrightarrow{a>۰} a=۴ \\ \frac{۳}{۸}a^{۲}+ab+b=۳ \xrightarrow{a=۴} b=\frac{-۳}{۵} \end{cases}$$

بنابراین ضابطهٔ تابع $g(x)$ برابر است با:

$$\rightarrow g(x)=ax+b=۴x-\frac{۳}{۵} \rightarrow g(۲)=۸-\frac{۳}{۵}=\frac{۳۷}{۵}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳۴ **سرنخ** ابتدا با یه تغییر متغیر f(x) را به دست بیار. حال، محور تقارن تابع درجه دوم همان طول رأس سهمی $\left(x=-\frac{b}{2a}\right)$ است.

پله اول: ابتدا تابع $fog(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$fog(x)=(2x+1)g(x)+6x=(2x+1)(2x-3)+6x=4x^2+2x-3$$

حالا با در نظر گرفتن $g(x)=t$ داریم:

$$2x-3=t\Rightarrow x=\frac{t+3}{2}\rightarrow f\big(g(x)\big)=4x^2+2x-3$$

$$\Rightarrow f(t)=4\left(\frac{t+3}{2}\right)^2+2\left(\frac{t+3}{2}\right)-3=(t+3)^2+(t+3)-3$$

$$\Rightarrow f(t)=t^2+7t+9$$

پله دوم: با جایگذاری x به جای t، ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=x^2+7x+9$ می شود و معادلهٔ محور تقارن آن برابر است با:

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{7}{2}=-3/5$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

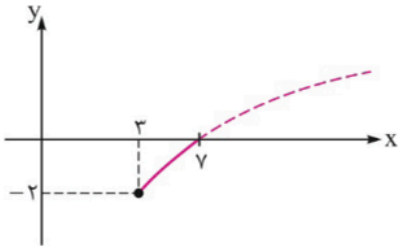
۲۳۵ تک پله: مطابق شکل نمودار تابع f در بازهٔ $[3,7)$ زیر محور xها قرار دارد و محدودهٔ بُرد آن در این بازه به صورت $[-2,0)$ است:

حالا ضابطهٔ وارون تابع را پیدا می‌کنیم:

$$y=-2+\sqrt{x-3}\rightarrow y+2=\sqrt{x-3}\xrightarrow{\text{توان ۲}}(y+2)^2=x-3$$

$$\rightarrow x=3+(y+2)^2\rightarrow x=y^2+4y+7$$

$$\xrightarrow{\text{تعویض y,x}}y=x^2+4x+7$$



بنابراین ضابطهٔ وارون تابع $f(x)$ به صورت زیر است:

$$f^{-1}(x)=x^2+4x+7,-2\le x<0$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳۶ **سرنخ** کلید حل مسئله توجه به ویژگی‌های توابع اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است.

پله اول: مطابق شکل تابع $f(x)$ و $g(x)$ به ترتیب اکیداً صعودی و نزولی می باشد پس داریم:

$$-4<f\big(g(2-x)\big)\le 6\rightarrow f(-3)<f\big(g(2-x)\big)\le f(4)$$

پله دوم:

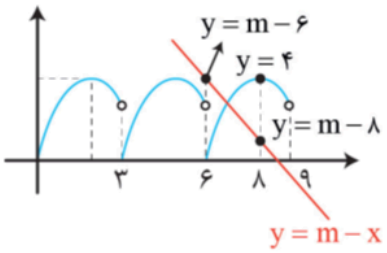
$$\xrightarrow{f(x)\text{اکیداً صعودی}}-3<g(2-x)\le 4\rightarrow g(6)<g(2-x)\le g(-4)$$

$$\xrightarrow{g(x)\text{اکیداً نزولی}}6>2-x\ge -4\rightarrow 4>-x\ge -6\rightarrow -4<x\le 6$$

پس مجموعه اعداد طبیعی $\{1,2,3,4,5,6\}$ می‌باشد که تعداد آن ۶ عدد است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳۷ این تابع متناوب با دوره تناوب ۳ است.



مطابق شکل باید داشته باشیم:

$$m-۶>۰ \quad و \quad m-۸<۴$$

$$\Rightarrow ۶<m<۱۲ \Rightarrow m=۷,۸,۹,۱۰,۱۱ \Rightarrow \text{مجموع}=۴۵$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳۸ **سرنخ** با توجه به ویژگی‌های انتقال توابع، تابع جدید را یافته و مساحت مثلث خواسته شده را محاسبه کنید.

پله اول: ابتدا تابع را وارون کرده و سپس انتقال می‌دهیم:

$$y=۲-\sqrt{۱۱-x} \xrightarrow{y\le ۲} ۲-y=\sqrt{۱۱-x} \to (۲-y)^۲=۱۱-x \to x=۱۱-(۲-y)^۲$$

$$\to y^{-۱}=۱۱-(۲-x)^۲ \xrightarrow{\text{۲ واحد به پایین}} ۹-(۲-x)^۲$$

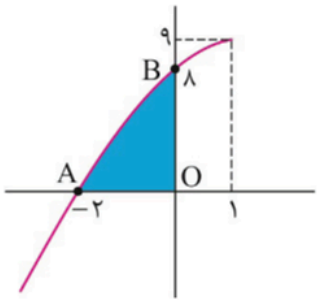
$$\xrightarrow{\text{یک واحد به چپ}} ۹-(۱-x)^۲=f(x)$$

پله دوم: دامنه تابع وارون برابر با برد تابع $y=۲-\sqrt{۱۱-x}$ است.

$$-\sqrt{۱۱-x}\le ۰ \xrightarrow{+۲} ۲-\sqrt{۱۱-x}\le ۲ \to y\le ۲ \to D_{y^{-۱}}: x\le ۲$$

می‌دانیم انتقال عمودی تاثیری در دامنهٔ تابع ندارد، بنابراین با یک واحد انتقال تابع وارون به سمت xهای منفی دامنه تابع $f(x)=۹-(۱-x)^۲$ برابر با $x\le ۱$ خواهد بود.

پله سوم: حال محل برخورد تابع $f(x)=۹-(۱-x)^۲$ را با محورهای مختصات، به دست آورده و مساحت $\overset{\triangle}{OAB}$ را حساب می‌کنیم:



$$y=۹-(۱-x)^۲=۰ \to \begin{cases} x=-۲ \checkmark \\ x=۴ \times \end{cases} \quad و \quad x=۰ \to y=۸$$

$$S_{\overset{\triangle}{OAB}}=\frac{۸\times|-۲|}{۲}=۸$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳۹ **سرنخ** ضابطهٔ وارون تابع $f(x)$ را یافته و با ضابطهٔ $f^{-1}(x)$ مقایسه کنید.

پله اول: در این تست تنها کاری که لازمه اینه که بیایم $f(x)$ را وارون کنیم و حاصل رو خیلی ساده بدست بیاریم پس:

$$f(x)=۴^x-۲^{x+۳}+۷=(۲^x)^۲-۸(۲^x)+۷=(۲^x-۴)^۲-۹$$

$$\rightarrow y+۹=(۲^x-۴)^۲\rightarrow |۲^x-۴|=\sqrt{y+۹}\xrightarrow{x\geq ۲}۲^x-۴=\sqrt{y+۹}\rightarrow ۲^x=۴+\sqrt{y+۹}$$

$$\rightarrow \text{Log}_۲(۴+\sqrt{y+۹})=x\rightarrow f^{-۱}(x)=\text{Log}_۲(۴+\sqrt{x+۹})$$

پله دوم: حال متوجه خواهید شد $a=۴$ و $b=۹$ و $c=۲$ است بنابراین:

$$f^{-۱}(b-c)=f^{-۱}(۷)=\text{Log}_۲(\sqrt{۷+۹}+۴)=\text{Log}_۲^۸=۳$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۴۰ **سرنخ** با توجه به ضابطهٔ توابع داده شده می‌توان گفت f تابعی خطی و g تابعی از درجه ۲ است.

پله اول: ترکیب $f(x)$ با خودش، تابعی درجه یک است، بنابراین $f(x)$ نیز درجه یک بوده است. پس داریم:

$$f(x)=ax+b\Rightarrow f(f(x))=a(ax+b)+b$$

$$fof(x)=a^۲x+ab+b=۴x-۳$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a^۲=۴\Rightarrow a=\pm ۲\\ ab+b=-۳\end{cases}$$

پله دوم: صورت سوال max تابع $g(x)$ را خواسته و fog نیز از درجه ۲ است. پس $g(x)$ یک سهمی رو به پایین است. بنابراین شیب $f(x)$ یعنی a باید منفی باشد، در اینصورت $a=-۲$ قابل قبول است.

$$a=-۲\Rightarrow -۲b+b=-۳\Rightarrow b=۳$$

$$f(x)=-۲x+۳$$

$$f\big(g(x)\big)=-۲g+۳=x^۲-x+۳$$

$$=-۲g=x^۲-x\Rightarrow g(x)=\frac{-۱}{۲}x^۲+\frac{۱}{۲}x$$

پله سوم:

$$\max_{g(x)}=g(x_S)=\frac{-\Delta}{۴a}=\frac{-\left(\frac{۱}{۴}-۴\left(-\frac{۱}{۲}\right)(۰)\right)}{۴\left(-\frac{۱}{۲}\right)}\rightarrow \max_{g(x)}=\frac{\frac{-۱}{۴}}{-۲}=\frac{۱}{۸}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۴۱ باید عبارت زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد، از طرفی در تابع اکیدا نزولی f، اگر $f(x_۲)<f(x_۱)$، آنگاه $x_۲>x_۱$ می‌باشد:

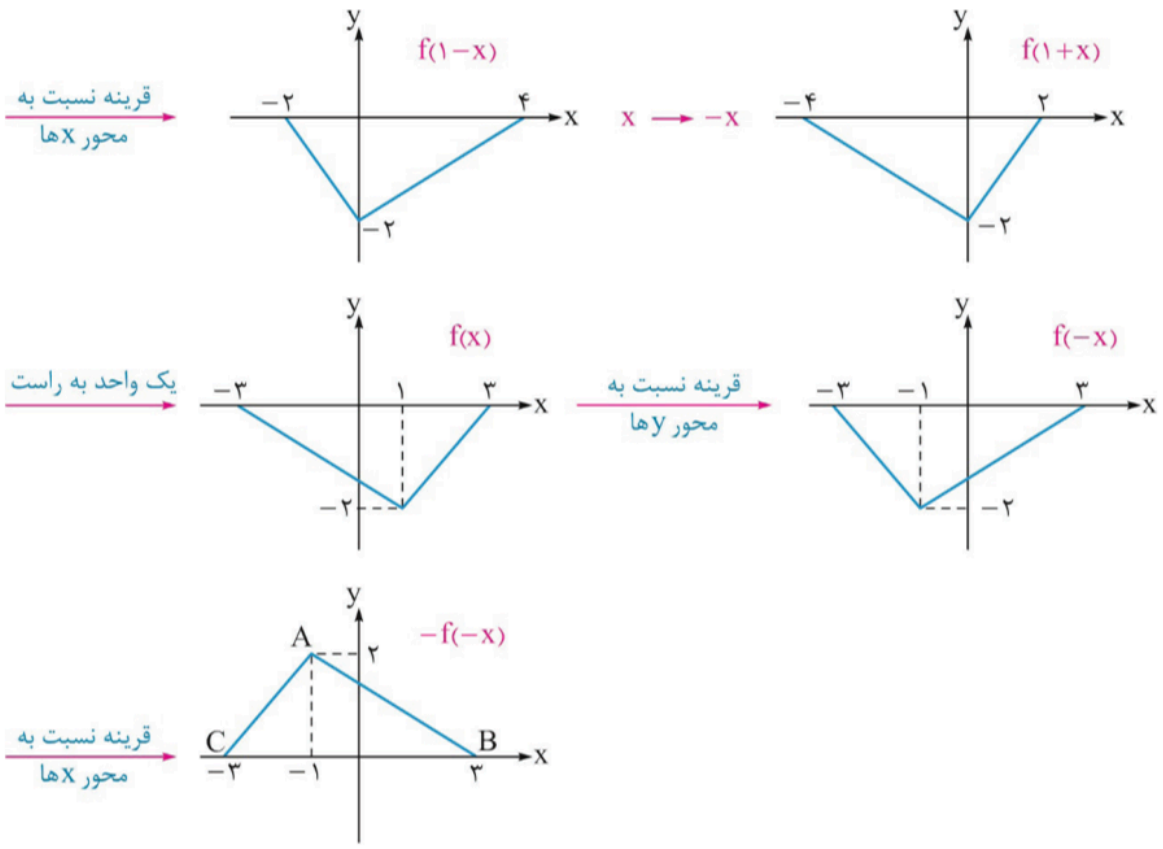
$$f\big(|۳x-۵|\big)-f\big(|۲x+۳|\big)\geq ۰\rightarrow f\big(|۳x-۵|\big)\geq f\big(|۲x+۳|\big)\rightarrow |۳x-۵|\leq |۲x+۳|\xrightarrow{\text{توان ۲}}$$

$$\rightarrow (۳x-۵)^۲-(۲x+۳)^۲\leq ۰\rightarrow (۳x-۵-۲x-۳)(۳x-۵+۲x+۳)\leq ۰\rightarrow (x-۸)(۵x-۲)\leq ۰\rightarrow \frac{۲}{۵}\leq x\leq ۸$$

بنابراین دامنهٔ تابع رادیکالی شامل ۸ عدد صحیح است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۴۲



AB خط $y = mx + b$

$$\begin{cases} ۳m + b = ۰ \\ -m + b = ۲ \end{cases} \rightarrow ۴m = -۲$$

$$m = -\frac{۱}{۲}$$

$$b = \frac{۳}{۲}$$

$$\rightarrow y = -\frac{x}{۲} + \frac{۳}{۲} \rightarrow a = -\frac{۳}{۲}$$

اگر نمودار را $\frac{۳}{۲}$ واحد به سمت پایین انتقال دهیم نمودار از مبدأ عبور می‌کند.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۴۳ ابتدا باید $g(-۴)$ را پیدا کنیم. برای این منظور باید در ضابطهٔ $g(x-۱)=\begin{cases}x+۴ & ;f(x)<۰\\ x-۸ & ;f(x)\geq ۰\end{cases}$ به جای x عدد ۳- قرار دهیم. حالا باید مشخص کنیم عدد $x=-۳$ را در ضابطهٔ بالایی قرار دهیم یا در ضابطهٔ پایینی . پس لازم است بفهمیم $f(-۳)$ مثبت است یا منفی. پس:

$$f(x+۲)=\begin{cases}۲x-۷ & ;x>۰\\ x+۴ & ;x\leq ۰\end{cases} \qquad \xrightarrow[x=-۵]{f(-۳)} \text{ ضابطهٔ پایینی}: f(-۵+۲)=-۵+۴=-۱$$

پس $f(-۳)=-۱$ است. چون $f(-۳)$ منفی است، پس برای پیدا کردن $g(-۴)$ باید $x=-۳$ را در ضابطهٔ بالایی قرار دهیم:

$$g(x-۱)\xrightarrow[x=-۳]{\text{ضابطهٔ بالایی}} g(-۳-۱)=-۳+۴=۱$$

$$\Rightarrow f\big(g(-۴)\big)=f(۱)\xrightarrow[x=-۱]{\text{ضابطهٔ پایینی}} f(-۱+۲)=-۱+۴=۳$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۴۴

$$y=f(x)\to D_f=(-۶,۴]\to D_{f(x+۲)}=(-۸,۲] \qquad (۱)$$

$$D_{f(۳-۲x)}: -۶<۳-۲x\leq ۴\to -\frac{۱}{۲}\leq x<\frac{۹}{۲}\to D_{f(۳-۲x)}=\left[-\frac{۱}{۲},\frac{۹}{۲}\right) \qquad (۲)$$

$$f(x+۲)-f(۳-۲x)>۰\to f(x+۲)>f(۳-۲x)$$

در تابع اکیداً صعودی f اگر $x_۲>x_۱$ باشد در این صورت $f(x_۲)>f(x_۱)$ است، بنابراین:

$$x+۲>۳-۲x\to ۳x>۱\to x>\frac{۱}{۳} \qquad (۳)$$

از اشتراک (۱) و (۲) و (۳) داریم:

$$D_y=\left(\frac{۱}{۳},۲\right]\to \text{شامل ۲ عدد صحیح}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۴۵ در معادلهٔ تلاقی، باید $\Delta<۰$ باشد:

$$\begin{cases}f(x)=x^۲-۲ax+۲\\ g(x)=-۲bx+۲ab\end{cases}\Rightarrow x^۲-۲ax+۲=-۲bx+۲ab$$

$$\Rightarrow x^۲-۲(a-b)x+۲-۲ab=۰\xrightarrow{\Delta<۰}$$

$$۴(a-b)^۲-۴(۱)(۲-۲ab)<۰\Rightarrow ۴a^۲-۸ab+۴b^۲-۸+۸ab<۰$$

$$\Rightarrow ۴(a^۲+b^۲)<۸\Rightarrow a^۲+b^۲<۲$$

پس بیشترین مقدار صحیح $a^۲+b^۲$ برابر ۱ است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۴۶ شرط آنکه f یکنوای اکید باشد آن است که صعودی اکید یا نزولی اکید باشد تابع f را به‌صورت چند ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}(a+۲)x-۶ & x\geq ۳\\ (a-۲)x+۶ & x<۳\end{cases}$$

حال اگر f صعودی اکید باشد پس هر دو تابع خطی باید دارای شیب مثبت باشد:

$$\begin{matrix}a+۲>۰\to a>-۲\\ a-۲>۰\to a>۲\end{matrix}\to a>۲$$

و اگر f نزولی اکید باشد پس هر دو تابع خطی باید دارای شیب منفی باشد.

$$\begin{matrix}a+۲<۰\to a<-۲\\ a-۲<۰\to a<۲\end{matrix}\to a<-۲$$

پس باید $|a|>۲$ باشد تا f یکنوای اکید گردد.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۴۷ چون $g^{-۱}(x^۳+۲)=x+۴$ است، پس $g(x+۴)=x^۳+۲$ است، بنابراین:

$$g(x)=(x-۴)^۳+۲$$

حال با توجه به ضابطهٔ $f\big(۱+g(x)\big)$ برای به دست آوردن $f(۱۱)$ باید $۱+g(x)=۱۱$ باشد، پس:

$$۱+g(x)=۱۱\Rightarrow g(x)=۱۰\Rightarrow (x-۴)^۳+۲=۱۰\Rightarrow (x-۴)^۳=۸$$

$$\Rightarrow x-۴=۲\Rightarrow x=۶$$

بنابراین خواهیم داشت: $f\big(۱+g(x)\big)=x^۳+۱\xrightarrow{x=۶}f(۱۱)=۶^۳+۱=۲۱۶+۱=۲۱۷$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۴۸ تابع خطی f از نقاط $(-۴,۰)$ و $(۰,۸)$ می‌گذرد و ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x)=۲x+۸$ است.

تابع fog یک سهمی درجهٔ دوم با راس سهمی $(۲,-۴)$ است که از مبدأ می‌گذرد، بنابراین:

$$fog=a(x-۲)^۲-۴\xrightarrow{(۰,۰)}۰=a(۰-۲)^۲-۴\to a=۱$$

$$fog=(x-۲)^۲-۴=x^۲-۴x$$

$$fog=f\big(g(x)\big)=۲g(x)+۸=x^۲-۴x\to g(x)=\frac{۱}{۲}x^۲-۲x-۴$$

در تابع g عدد ثابت $C<۰$ و $\Delta>۰$ است، بنابراین این سهمی از هر چهار ناحیه عبور می‌کند.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۴۹ پاسخ تشریحی

گام اول: تابع f ثابت است، پس مؤلفه‌های دوم تمام زوج‌مرتب‌های آن با هم برابرند:

$$\begin{cases} a-3=-1 \Rightarrow a=2 \\ b-3a=-1 \Rightarrow b-3\times 2=-1 \Rightarrow b=5 \end{cases}$$

گام دوم: تابع g همانی است، پس ضابطهٔ آن به ازای هر x برابر با $y=x$ باید باشد:

$$\begin{cases} g(x)=\alpha x^2+(b-\beta)x \\ g(x)=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ b-\beta=1 \xrightarrow{b=5} \beta=4 \end{cases}$$

گام سوم: حاصل $g\left(\frac{b+\beta}{a+\alpha}\right)$ را به دست می‌آوریم:

$$g\left(\frac{5+4}{2+0}\right)=g\left(\frac{9}{2}\right)=g(4/5) \overset{g(x)=x}{=\!=} 4/5$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۵۰ پاسخ تشریحی

گام اول: ابتدا دامنهٔ تابع را به‌دست می‌آوریم:

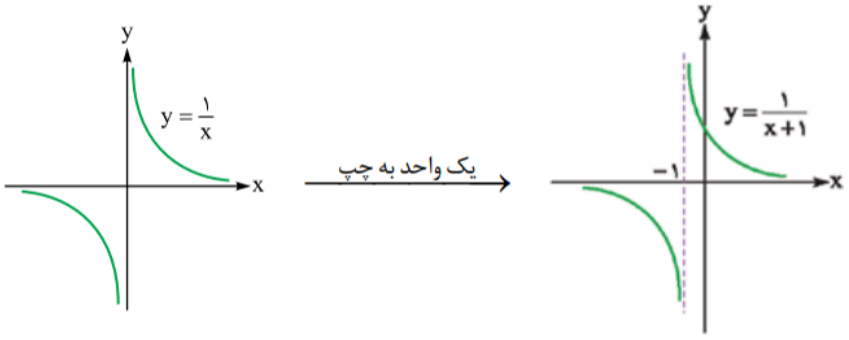
$$f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-1},\ x^2-1\neq 0 \Rightarrow x\neq \pm 1 \qquad \text{دامنهٔ } f=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$$

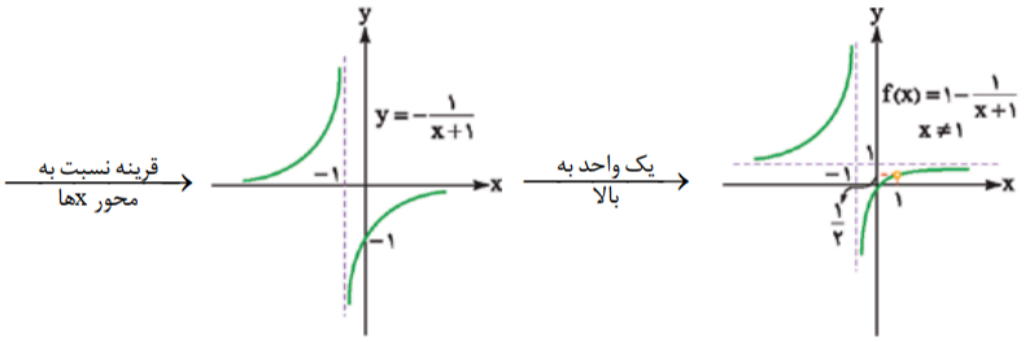
گام دوم: $x=1$ ریشهٔ صورت و مخرج کسر است و تابع در این نقطه توخالی است.

$$f(x)=\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow f(x)=\frac{x}{x+1},\ x\neq 1$$

گام سوم: نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{x+1},\ x\neq 1$ را با استفاده از انتقال تابع $y=\frac{1}{x}$ رسم می‌کنیم.

$$f(x)=\frac{x+1-1}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}$$

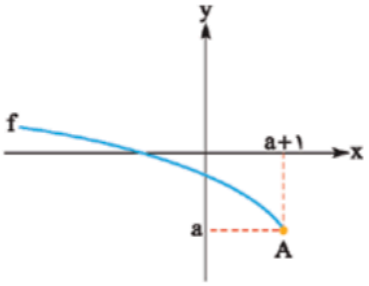




گام چهارم: با توجه به نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{x+1}$ و $x\neq 1$، بُرد تابع $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2},1\right\}$ است. در نتیجه مجموع اعضای مجموعهٔ A برابر با $1/5$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۵۱ پاسخ تشریحی



گام اول: مطابق شکل مقابل، طول نقطهٔ A، همان ریشهٔ عبارت $ax+b$ در زیر رادیکال است، پس:

$$ax+b=0 \xrightarrow{x=a+1} a(a+1)+b=0$$
$$\Rightarrow b=-a^2-a \quad (1)$$

گام دوم: با جای‌گذاری مختصات نقطهٔ $A(a+1,a)$ در تابع داریم:

$$a=\sqrt{\underbrace{a(a+1)+b}_{\text{صفر}}}-2a^2+b \Rightarrow b=2a^2+a \quad (2)$$

(ریشهٔ عبارت زیر رادیکال)

گام سوم: از تساوی‌های (۱) و (۲) داریم:

$$2a^2+a=-a^2-a \Rightarrow 3a^2+2a=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \text{ غ.ق.ق} \\ a=-\frac{2}{3} \xrightarrow{(1)} b=-(-\frac{2}{3})^2-(-\frac{2}{3})=-\frac{4}{9}+\frac{2}{3}=\frac{2}{9} \end{cases}$$

گام چهارم: خواستهٔ سؤال $\frac{a}{b}=\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{2}{9}}=-3$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۵۲ پاسخ تشریحی

گام اول: نامعادلهٔ قدرمطلقی را ساده می‌کنیم:

$$|x+[x]|\le x-[x] \Rightarrow \underbrace{-(x-[x])\le \overbrace{x+[x]}^{(2)}\le x-[x]}_{(1)}$$

گام دوم: هر یک از نامعادله‌های (۱) و (۲) را جداگانه حل می‌کنیم و سپس بین جواب‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$(1)\ -x+[x]\le x+[x] \Rightarrow 0\le 2x \Rightarrow 0\le x \quad (3)$$
$$(2)\ x+[x]\le x-[x] \Rightarrow 2[x]\le 0 \Rightarrow [x]\le 0 \Rightarrow x<1 \quad (4)$$

اشتراک (۳) و (۴) به صورت $0\le x<1$ است ($x\in[0,1)$).

گام سوم: در نتیجه مجموعه جواب نامعادله به صورت بازهٔ $[a,b)$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۵۳ پاسخ تشریحی

گام اول: تابع خطی f از دو نقطهٔ $(2,-1)$ و $(8,1)$ عبور می‌کند، پس تابع وارون آن از دو نقطهٔ $(-1,2)$ و $(1,8)$ عبور می‌کند.

گام دوم: ضابطهٔ تابع خطی $f^{-1}(x)$ را می‌نویسیم:

$$y-1=\frac{1-(-1)}{8-2}(x-8) \Rightarrow y=\frac{x}{3}-\frac{5}{3} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{3}(x-5)$$

گام سوم: معادلهٔ $[f^{-1}(x)]+3=0$ را بازنویسی می‌کنیم:

$$[\frac{1}{3}(x-5)]+3=0 \Rightarrow [\frac{1}{3}(x-5)]=-3 \Rightarrow -3\le \frac{1}{3}(x-5)<-2 \xrightarrow{\times 3} -9\le x-5<-6$$
$$\xrightarrow{+5} -4\le x<-1 \Rightarrow \begin{cases} -2=\text{بزرگ‌ترین عدد صحیح} \\ -4=\text{کوچک‌ترین عدد صحیح} \end{cases} \Rightarrow \text{اختلاف}=2$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۵۴ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** f تابع همانی است، پس ضابطهٔ آن $f(x)=x$ است. $f(a)$ و $f(۲a+f(a))$ را برحسب a حساب می‌کنیم.

$$\xrightarrow{f(x)=x} f(a)=a$$
$$f(۲a+\underbrace{f(a)}_{a})=f(۳a)=۳a \quad (۱)$$

گام دوم: تساوی (۱) را در معادلهٔ صورت سؤال جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\underbrace{f(۲a+f(a))}_{۳a}=a^۲-۴ \Rightarrow a^۲-۳a-۴=۰ \xrightarrow{\text{تجزیه}} (a-۴)(a+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۴ \\ a=-۱ \end{cases}$$

گام سوم: مجموع مقادیر قابل قبول برای a برابر با $۳=۱-۴$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۵۵ ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به شرح زیر می‌یابیم.

انقباض $\frac{۱}{۲}$ برابری افقی : $y=\sqrt{۲x-۲}$

قرینه نسبت به خط $x=-۱$ $y=\sqrt{۲(-۲-x)-۲}=\sqrt{-۲x-۶}$

ضابطهٔ تابع $g(x)$ برابر $\sqrt{-۲x-۶}$ است.

$$g(x)=\sqrt{-۲x-۶} \to y=\sqrt{-۲x-۶} \to y^۲=-۲x-۶ \to x=-\frac{۱}{۲}y^۲-۳$$

در نتیجه $g^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۲}x^۲-۳$ و مقادیر $a=-\frac{۱}{۲}$، $b=۰$، $c=-۳$ و حاصل $\frac{a}{c}+b=\frac{-\frac{۱}{۲}}{-۳}=\frac{۱}{۶}$ است.

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۵۶ ابتدا تبدیل‌های لازم را انجام می‌دهیم:

$$y=\frac{۱}{\sqrt{f}} \xrightarrow{f(x)=x} y=\frac{۱}{\sqrt{x}} \xrightarrow{\text{۳ واحد به چپ}} y=\frac{۱}{\sqrt{x+۳}} \xrightarrow{\text{انقباض با نسبت } \frac{۱}{۲}} y=\frac{۱}{\sqrt{۲x+۳}}$$

نمودار حاصل را با نمودار تابع $g(x)$ برخورد می‌دهیم:

$$\frac{۱}{\sqrt{۲x+۳}}=\frac{۱}{x} \Rightarrow \sqrt{۲x+۳}=x \xrightarrow{\uparrow ۲} ۲x+۳=x^۲ \Rightarrow x^۲-۲x-۳=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \text{ غ ق ق} \\ x=۳ \Rightarrow y=\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

بنابراین نقطه برخورد $(۳,\frac{۱}{۳})$ خواهد بود که مجموع طول و عرض آن برابر با $۳+\frac{۱}{۳}=\frac{۱۰}{۳}$ است.

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۵۷ دقت کنید که $f(x)$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$y=f(x)=(x-۳)^۳+۹+a\rightarrow y-۹-a=(x-۳)^۳\rightarrow x=\sqrt[۳]{y-۹-a}+۳\Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x-۹-a}+۳$$

حال، داریم:

$$(f+f^{-۱})(۳)=f(۳)+f^{-۱}(۳)=(۹+a)+(\sqrt[۳]{-۶-a}+۳)=۶\Rightarrow\sqrt[۳]{-۶-a}=-۶-a\Rightarrow\begin{cases}-۶-a=۰\Rightarrow a=-۶\\-۶-a=۱\Rightarrow a=-۷\\-۶-a=-۱\Rightarrow a=-۵\end{cases}$$

بنابراین حاصل‌ضرب مقادیر قابل‌قبول برای a، برابر با $(-۶)(-۷)(-۵)=-۲۱۰$ است.

(ماروال ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۵۸ اگر شیب $gof^{-۱}$ برابر با $\frac{۱}{۳}$ باشد، شیب تابع $(gof^{-۱})^{-۱}$ برابر با ۳ است.

از طرفی این تابع نمودار f را در نقطه‌ای به عرض ۹ قطع می‌کند. داریم:

$$f(x)=۲x-۳=۹\Rightarrow x=۶$$

حال با داشتن شیب و یک نقطه، معادله خط $(gof^{-۱})^{-۱}$ را می‌نویسیم:

$$(gof^{-۱})^{-۱}=۳x-۹\rightarrow fog^{-۱}=۳x-۹=f(g^{-۱}(x))$$

$$\Rightarrow ۲g^{-۱}(x)-۳=۳x-۹\Rightarrow g^{-۱}(x)=\frac{۳x-۶}{۲}$$

(ماروال ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

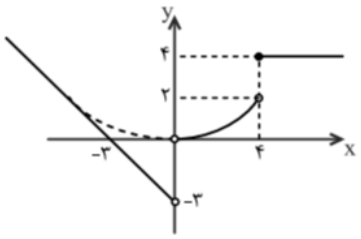
۲۵۹ می‌دانیم دامنهٔ تابع $\frac{f}{g}$ برابر است با $D_f\cap D_g-\{x\,|\,g(x)=۰\}$. پس تابع $g(x)$ در نقاط $\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ باید برابر با صفر شود. داریم:

$$g(\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳})=۰\Rightarrow ۱-\frac{a}{۲}(\frac{۱}{۳}-۱)=۰\quad\Rightarrow\frac{a}{۲}(-\frac{۲}{۳})=۱\Rightarrow a=-۳\qquad f^۲(-۳+۱)=f^۲(-۲)=(f(-۲))^۲=((-۲)^۳-۲)^۲$$

$$=(-۸-۲)^۲=(-۱۰)^۲=۱۰۰$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶۰ نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



$$f(x)=\begin{cases}-x-۳ & , \quad x<۰\\ \frac{۱}{۸}x^۲ & , \quad ۰<x<۴\\ ۴ & , \quad x\geq ۴\end{cases}$$

با توجه به نمودار، برد تابع، بازهٔ $(-۳\,,+\infty)$ است.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶۱ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** ابتدا به ازای هر عضو از مجموعهٔ بُرد مقدار ورودی تابع را به دست می‌آوریم: $f(x)=x^2$, برد $=\{0,2,4\}$

$$f(x)=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0 \qquad f(x)=2 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \qquad f(x)=4 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$$

گام دوم: مجموعهٔ D باید شامل عدد صفر، حداقل یکی از دو عدد $\pm\sqrt{2}$ و حداقل یکی از دو عدد ± 2 باشد. حالت‌های مختلف آن را می‌نویسیم:

$$D=\{0,\sqrt{2},2\} \qquad D=\{0,\sqrt{2},-\sqrt{2},2\}$$
$$D=\{0,\sqrt{2},-2\} \qquad D=\{0,\sqrt{2},-\sqrt{2},-2\}$$
$$D=\{0,-\sqrt{2},2\} \qquad D=\{0,\sqrt{2},2,-2\}$$
$$\underbrace{D=\{0,-\sqrt{2},-2\}}_{\text{۳ عضو}} \qquad \underbrace{D=\{0,-\sqrt{2},2,-2\}}_{\text{۴ عضو}} \qquad \underbrace{D=\{0,\sqrt{2},-\sqrt{2},2,-2\}}_{\text{۵ عضو}}$$

گام سوم: تعداد اعضای مجموعهٔ D، سه مقدار مختلف (۳، ۴ یا ۵) می‌تواند داشته باشد.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶۲ **پاسخ تشریحی** در هر گزینه، شرط دامنه و شرط ضابطه را بررسی می‌کنیم.

(۱) $$D_f:\begin{cases}x-2\geq 0 \Rightarrow x\geq 2\\ x-4\geq 0 \Rightarrow x\geq 4\end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f=[4,+\infty)$$

$$D_g: x^2-6x+8\geq 0 \Rightarrow (x-2)(x-4)\geq 0 \Rightarrow D_g=(-\infty,2]\cup[4,+\infty)$$

$D_f\neq D_g$، پس دو تابع مساوی نیستند.

(۲) $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$, $D_g=\mathbb{R} \Rightarrow D_f\neq D_g \Rightarrow$ دو تابع مساوی نیستند.

(۳) $$D_f: x(x-2)^2\geq 0 \Rightarrow D_f=[0,+\infty) \quad , \quad D_g=[0,+\infty)$$
$$f(x)=\sqrt{x(x-2)^2}=\sqrt{(x-2)^2}\times\sqrt{x}=|x-2|\sqrt{x}=g(x)$$

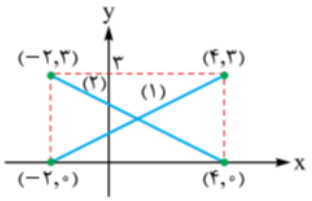
پس دو تابع f و g مساوی هستند.

(۴) $$D_f: -x^3\geq 0 \Rightarrow x\leq 0 \Rightarrow D_f=(-\infty,0]$$
$$D_g: x\geq 0 \Rightarrow D_g=[0,+\infty)$$

پس $D_f\neq D_g$ و در نتیجه دو تابع مساوی نیستند.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶۳ پاسخ تشریحی **گام اول:** با توجه به دامنه و برد داده‌شده، نمودار تابع خطی f به یکی از دو حالت زیر می‌تواند باشد:



گام دوم: ضابطهٔ هر یک از این دو خط را می‌نویسیم:

$$y_۱ - ۰ = \frac{۳-۰}{۴-(-۲)}(x-(-۲)) \Rightarrow y_۱ = \frac{۱}{۲}(x+۲)$$

$$y_۲ - ۰ = \frac{۳-۰}{-۲-۴}(x-۴) \Rightarrow y_۲ = -\frac{۱}{۲}(x-۴)$$

گام سوم: با جای‌گذاری $x=۰$ در هر کدام از ضابطه‌ها، خروجی را به دست می‌آوریم:

$$y_۱ = \frac{۱}{۲}(x+۲) \xrightarrow{x=۰} y_۱ = ۱$$

$$y_۲ = -\frac{۱}{۲}(x-۴) \xrightarrow{x=۰} y_۲ = ۲$$

پس مجموعهٔ مقادیر $f(۰)$ برابر با $\{۱,۲\}$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶۴ پاسخ تشریحی **گام اول:** برد تابع $(-\infty,a]$ است؛ پس دهانهٔ سهمی رو به پایین باز می‌شود و ضریب $x^۲$ منفی است $(a<۰)$.

گام دوم: عرض رأس سهمی برابر با a است:

$$\text{عرض رأس سهمی} = a \Rightarrow \frac{-\Delta}{۴a} = a \Rightarrow \frac{۴a(۲a)-(-۴)^۲}{۴a} = a \Rightarrow ۸a^۲ - ۱۶ = ۴a^۲ \Rightarrow ۴a^۲ = ۱۶$$

$$\Rightarrow a^۲ = ۴ \xrightarrow{a<۰} a = -۲ \Rightarrow f(x) = -۲x^۲ - ۴x - ۴$$

گام سوم: فقط با برداشتن رأس سهمی، برد تابع تغییر می‌کند؛ پس خواستهٔ سؤال، طول رأس سهمی است:

$$x_S = -\frac{b}{۲a} = -\frac{-۴}{۲(-۲)} = -۱$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶۵ پاسخ تشریحی **گام اول:** از تغییر متغیر $\alpha = x - \frac{۱}{x}$ استفاده می‌کنیم و سعی می‌کنیم عبارت $x^۲ + \frac{۱}{x^۲} - ۴$ را برحسب α بنویسیم.

$$\alpha = x - \frac{۱}{x} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \alpha^۲ = x^۲ - ۲x \times \frac{۱}{x} + \frac{۱}{x^۲} \Rightarrow \alpha^۲ = x^۲ + \frac{۱}{x^۲} - ۲ \xrightarrow{-۲} \alpha^۲ - ۲ = x^۲ + \frac{۱}{x^۲} - ۴$$

گام دوم: با جای‌گذاری عبارت به دست آمده از گام اول در ضابطهٔ $f(x-\frac{۱}{x}) = x^۲ + \frac{۱}{x^۲} - ۴$، داریم:

$$f(\alpha) = \alpha^۲ - ۲$$

گام سوم: معادلهٔ $f(\alpha) = ۳$ را حل می‌کنیم تا مقادیر قابل قبول برای α را پیدا کنیم:

$$f(\alpha) = ۳ \Rightarrow \alpha^۲ - ۲ = ۳ \Rightarrow \alpha^۲ = ۵ \Rightarrow \alpha = \pm\sqrt{۵} \Rightarrow \alpha \text{ حاصل‌ضرب مقادیر} = -۵$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶۶ پاسخ تشریحی

گام اول:

$$\begin{cases}(۱,۲a)\in f\\(۱,۴)\in f\end{cases}\xrightarrow{\text{f تابع است.}} ۲a=۴ \Rightarrow a=۲ \Rightarrow f=\{(۱,۴),(۲,-۱),(۲,b-۲),(۳,۲),(۳,c)\}$$

گام دوم:

$$\begin{cases}(۲,-۱)\in f\\(۲,b-۲)\in f\end{cases}\xrightarrow{\text{f تابع است.}} b-۲=-۱ \Rightarrow b=۱$$

$$\begin{cases}(۳,۲)\in f\\(۳,c)\in f\end{cases}\xrightarrow{\text{f تابع است.}} c=۲$$

$$\Rightarrow f=\{(۱,۴),(۲,-۱),(۳,۲)\} \Rightarrow f(۲)=-۱\ ,\ f(۳)=۲$$

گام سوم:

$$g(x)=\frac{x+۱}{x^۲+۳x+۲}\begin{cases}\xrightarrow{x=۲} g(۲)=\frac{۲+۱}{۲^۲+۳\times ۲+۲}=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴}\\ \xrightarrow{x=۳} g(۳)=\frac{۳+۱}{۳^۲+۳\times ۳+۲}=\frac{۴}{۲۰}=\frac{۱}{۵}\end{cases}$$

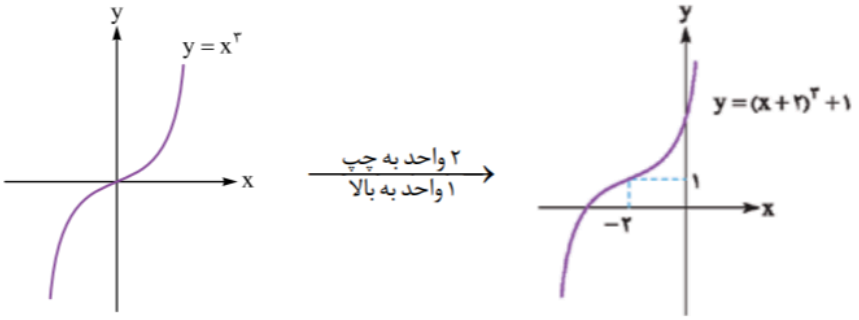
گام چهارم: حاصل عبارت خواسته‌شده را با توجه به گام دوم و سوم، به دست می‌آوریم:

$$\frac{(f+g)(۲)}{(f.g)(۳)}=\frac{f(۲)+g(۲)}{f(۳)\times g(۳)}=\frac{-۱+\frac{۱}{۴}}{۲\times\frac{۱}{۵}}=\frac{-\frac{۳}{۴}}{\frac{۲}{۵}}=-\frac{۱۵}{۸}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶۷ پاسخ تشریحی

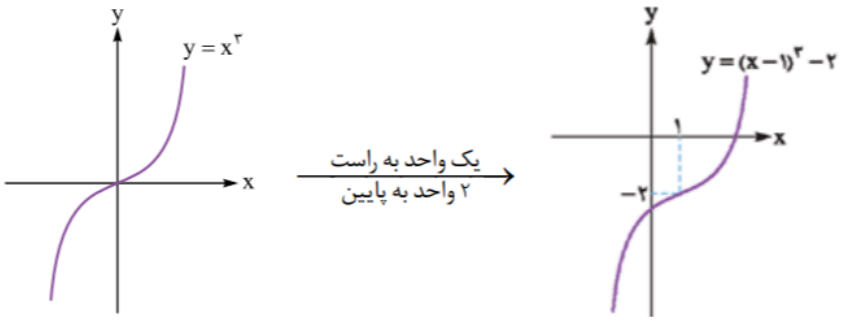
گام اول: با انتقال نمودار تابع $y=x^۳$، به نمودار داده‌شده می‌رسیم و ضابطهٔ آن را تعیین می‌کنیم.



گام دوم:

$$\begin{cases}y=(x+۲)^۳+۱\\y=(x-n)^۳+k\end{cases}\Rightarrow n=-۲\ ,\ k=۱$$

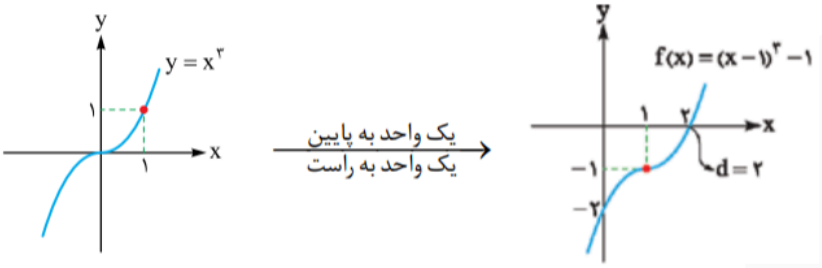
گام سوم: خواستهٔ سؤال، نمودار تابع $y=(x-k)^۳+n$ است که ضابطهٔ آن $y=(x-۱)^۳-۲$ است. نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



$\Rightarrow$ از ناحیهٔ دوم عبور نمی‌کند.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶۸ پاسخ تشریحی **گام اول:** طبق ضابطهٔ داده‌شده، تابع درجه‌سوم است. با انتقال تابع $y=x^{۳}$ به اندازهٔ یک واحد به پایین و یک واحد به راست تابع f به دست می‌آید.



گام دوم: با استفاده از اتحاد چاق و لاغر عبارت $f(x)=(x-۱)^{۳}-۱$ را تجزیه می‌کنیم تا به فرم داده‌شده در صورت سؤال برسیم و مساوی با ضابطهٔ داده‌شده قرار می‌دهیم.

$$f(x)=(x-۱)^{۳}-۱^{۳}=((x-۱)-۱)((x-۱)^{۲}+(x-۱)(۱)+۱^{۲})=(x-۲)(x^{۲}-۲x+۱+x-۱+۱)=(x-۲)(x^{۲}-x+۱)$$

$$=(x-a)(x^{۲}-bx+c)\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\b=۱\\c=۱\end{cases}$$

گام سوم: خواستهٔ سؤال $a+b+c+d=۲+۱+۱+۲=۶$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶۹ پاسخ تشریحی **گام اول:** تابع $(fog)(x)$ را تشکیل می‌دهیم.

$$(fog)(x)=f(g(x))\xrightarrow{f(x)=\frac{x+۱}{x+۵}}\frac{g(x)+۱}{g(x)+۵}\xrightarrow{g(x)=\frac{x-۱}{x+۲}}\frac{\frac{x-۱}{x+۲}+۱}{\frac{x-۱}{x+۲}+۵}=\frac{\frac{x-۱+x+۲}{x+۲}}{\frac{x-۱+۵x+۱۰}{x+۲}}$$

$$\xrightarrow{x\neq-۲}\frac{۲x+۱}{۶x+۹}\Rightarrow(fog)(x)=\frac{۲x+۱}{۶x+۹}\qquad x\neq-۲,-\frac{۳}{۲}$$

گام دوم: معادلهٔ $(fog)(x)=g(x)$ را نوشته و حل می‌کنیم.

$$(fog)(x)=g(x)\Rightarrow\frac{۲x+۱}{۶x+۹}=\frac{x-۱}{x+۲}\xrightarrow[x\neq-۲,-\frac{۳}{۲}]{\text{طرفین‌وسطین}}(۲x+۱)(x+۲)=(x-۱)(۶x+۹)$$

$$\Rightarrow ۲x^{۲}+۵x+۲=۶x^{۲}+۳x-۹\Rightarrow ۴x^{۲}-۲x-۱۱=۰\quad(۱)$$

گام سوم: در معادلهٔ درجه‌دوم (۱)، $\Delta>۰$ است؛ پس معادله دو ریشه دارد. با توجه به علامت S و P، علامت ریشه‌ها را تعیین می‌کنیم.

$$\left.\begin{aligned}S&=-\frac{b}{a}=-\frac{-۲}{۴}=\frac{۱}{۲}\\P&=\frac{c}{a}=\frac{-۱۱}{۴}\end{aligned}\right\}\xrightarrow[P<۰]{S>۰}$$

یکی از ریشه‌ها مثبت و دیگری منفی است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۷۰ پاسخ تشریحی **گام اول:** ابتدا با جای‌گذاری f در ضابطهٔ تابع g، آن را ساده‌تر می‌کنیم.

$$g(x)=f(x+f(x)) \xrightarrow{f(x)=-x-[x]} g(x)=f(x-x-[x]) \Rightarrow g(x)=f(-[x])$$

$$\Rightarrow g(x)=-(-[x])-\underbrace{[\overbrace{-[x]}^{-[x]}]}_{\in\mathbb{Z}}=[x]+[x] \Rightarrow g(x)=2[x]$$

گام دوم: نسبت طلایی برابر با $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است. خواستهٔ سؤال $(fog)(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ است. ابتدا $g(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ را حساب می‌کنیم.

$$g(\frac{1+\sqrt{5}}{2})=2\left[\underbrace{\overbrace{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}^{\simeq 2/2}}_{\simeq \frac{3/2}{2}=1/6}\right]=2\times\underbrace{[1/6]}_{1}=2$$

$$\Rightarrow (fog)(\frac{1+\sqrt{5}}{2})=f(\underbrace{g(\frac{1+\sqrt{5}}{2})}_{2})=f(2)=-2-[2]=-4$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۷۱ پاسخ تشریحی **گام اول:** تابع $3f+2g$ نزولی اکید است؛ پس قرینهٔ آن یعنی تابع $-3f-2g$ صعودی اکید می‌شود.

گام دوم: دو تابع اکیداً صعودی $f+2g$ و $-3f-2g$ را با هم جمع می‌کنیم، تابع حاصل نیز صعودی اکید خواهد شد.

$$\underbrace{(f+2g)}_{\text{صعودی اکید}}+\underbrace{(-2g-3f)}_{\text{صعودی اکید}}=\underbrace{-2f}_{\text{صعودی اکید}} \xrightarrow{\times(-\frac{1}{2})} \underbrace{f}_{\text{نزولی اکید}}$$

گام سوم: از این‌که تابع f نزولی اکید است، نتیجه می‌گیریم:

f نزولی اکید است. ← (جواب ۳ است.) f^{-1} نزولی اکید است.
(۱ رد می‌شود.) fof صعودی اکید است.

حالا سایر گزینه‌ها را نیز بررسی می‌کنیم:

تابع $f+2g$ صعودی اکید است؛ پس با ضرب (-3) در مقادیر تابع، تابع حاصل یعنی $-3f-6g$ نزولی اکید می‌شود.

دو تابع اکیداً نزولی $3f+2g$ و $-3f-6g$ را با هم جمع می‌کنیم، تابع حاصل نیز نزولی اکید خواهد شد.

$$\underbrace{(2g+3f)}_{\text{نزولی اکید}}+\underbrace{(-3f-6g)}_{\text{نزولی اکید}}=\underbrace{-4g}_{\text{نزولی اکید}} \xrightarrow{\times(-\frac{1}{4})} \underbrace{g}_{\text{صعودی اکید}}$$

از این‌که تابع g صعودی اکید است، نتیجه می‌گیریم:

g صعودی اکید است. ← (۴ رد می‌شود.) g^{-1} صعودی اکید است.
(۲ رد می‌شود.) gog صعودی اکید است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۷۲ **پاسخ تشریحی**

گام اول: ابتدا ضابطهٔ وارون تابع $y=f(2x)$ را به دست می‌آوریم. برای این کار باید در ضابطه جای x و y را عوض کنیم.

$$y=f(2x) \xrightarrow[\text{عوض می‌کنیم}]{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را}} x=f(2y) \quad (1)$$

گام دوم: راه اول: از تعریف تابع وارون می‌دانیم اگر $(2y,x)\in f$ باشد، آن‌گاه $(x,2y)\in f^{-1}$ است؛ یعنی:

$$f(2y)=x \Rightarrow f^{-1}(x)=2y \Rightarrow y=\frac{1}{2}f^{-1}(x)$$

راه دوم: از طرفین تساوی (۱)، f^{-1} می‌گیریم:

$$x=f(2y) \xrightarrow{f^{-1}\text{ می‌گیریم}} f^{-1}(x)=\underbrace{f^{-1}(f(2y))}_{f^{-1}\text{of}(2y)=2y} \Rightarrow f^{-1}(x)=2y \Rightarrow y=\frac{1}{2}f^{-1}(x)$$

گام سوم: باید ببینیم چه تبدیل‌هایی بر روی تابع $y=\frac{1}{3}f^{-1}(2+x)$ اعمال کنیم تا به تابع $y=\frac{1}{2}f^{-1}(x)$ برسیم.

$$y=\frac{1}{3}f^{-1}(2+x) \xrightarrow[\text{ضریب } \frac{3}{2}]{\text{انبساط عمودی با}} \underbrace{\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}f^{-1}(2+x)}_{\frac{1}{2}f^{-1}(2+x)} \xrightarrow[\text{اندازهٔ ۲ واحد به راست}]{\text{انتقال افقی به}} \frac{1}{2}f^{-1}(2+(x-2))=\frac{1}{2}f^{-1}(x)$$

پس جواب ۴ است.

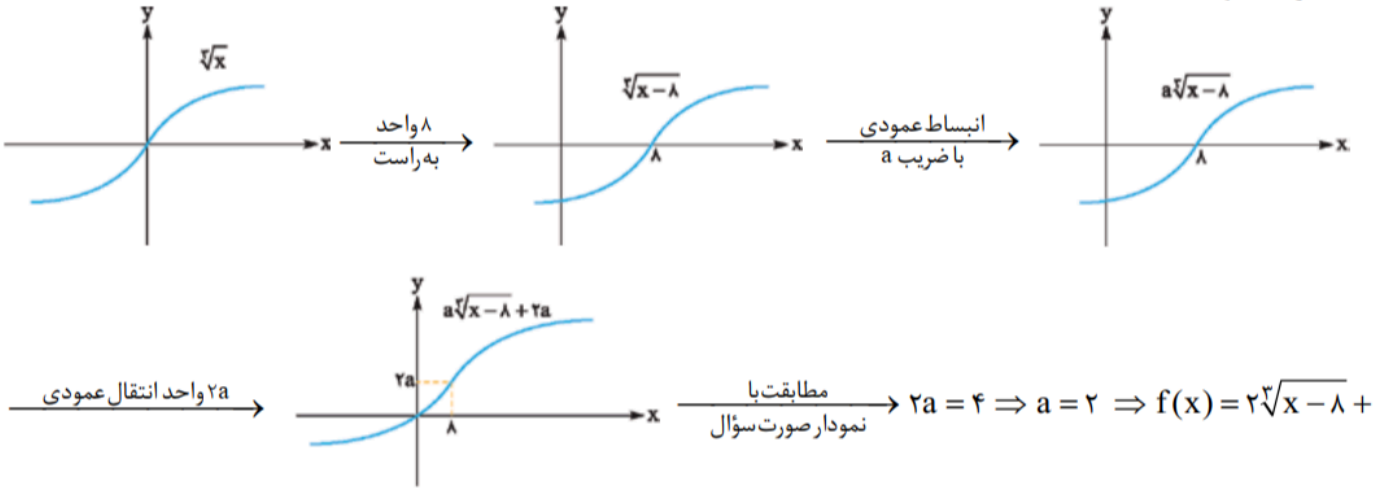
(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۷۳ پاسخ تشریحی **گام اول:** نمودار تابع از مبدأ عبور می‌کند؛ پس $f(۰)=۰$ است.

$$f(۰)=۰ \Rightarrow a\sqrt[۳]{۰+b}+۲a=۰ \Rightarrow a(\sqrt[۳]{b}+۲)=۰ \xrightarrow{a\neq ۰} \sqrt[۳]{b}+۲=۰ \Rightarrow \sqrt[۳]{b}=-۲$$

$$\xrightarrow{\text{توان }۳} b=-۸ \Rightarrow f(x)=a\sqrt[۳]{x-۸}+۲a \quad (۱)$$

گام دوم: اگر نمودار تابع $y=x^۳$ را نسبت به خط $y=x$ قرینه کنیم، به نمودار تابع معکوس آن یعنی تابع $y=\sqrt[۳]{x}$ می‌رسیم. از انتقال افقی، انبساط و انتقال عمودی نمودار تابع $y=\sqrt[۳]{x}$ به نمودار داده‌شده در صورت سؤال می‌رسیم. طبق رابطهٔ (۱)، مقدار انتقال افقی ۸ واحد به سمت راست بوده است.



$$\xrightarrow[\text{نمودار صورت سؤال}]{\text{مطابقت با}} ۲a=۴ \Rightarrow a=۲ \Rightarrow f(x)=۲\sqrt[۳]{x-۸}+۴$$

گام سوم: خواستهٔ سؤال $f^{-۱}(-\frac{۱}{۲}a-b)$ است.

$$-\frac{۱}{۲}a-b=-\frac{۱}{۲}\times(۲)-(-۸)=-۱+۸=۷$$

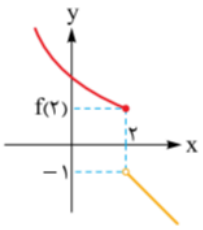
با فرض $f^{-۱}(۷)=\alpha$، طبق تعریف $f(\alpha)=۷$ می‌شود.

گام چهارم: معادلهٔ $f(\alpha)=۷$ را تشکیل می‌دهیم و حل می‌کنیم.

$$۲\sqrt[۳]{\alpha-۸}+۴=۷ \Rightarrow ۲\sqrt[۳]{\alpha-۸}=۳ \Rightarrow \sqrt[۳]{\alpha-۸}=\frac{۳}{۲} \xrightarrow{\text{توان }۳} \alpha-۸=\frac{۲۷}{۸} \Rightarrow \alpha=\frac{۹۱}{۸}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۷۴ پاسخ تشریحی



گام اول: نموداری از تابع f رسم می‌کنیم. تابع باید در هر یک از ضابطه‌هایش یک‌به‌یک باشد تا در کل نیز بتواند یک‌به‌یک باشد. برای آن‌که ضابطهٔ پایینی f یک‌به‌یک باشد، باید طول رأس سهمی در محدودهٔ $x < ۲$ قرار نگیرد؛ یعنی باید $x_s = m \geq ۲$ (*) باشد.

گام دوم: برای آن‌که تابع f یک‌به‌یک باشد، هیچ خط افقی‌ای نباید نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع کند؛ در نتیجه طبق نمودار باید شرط زیر برقرار باشد.

از ضابطهٔ بالایی ↑
$f(۲) \geq -۱$
↓ از ضابطهٔ پایینی

$$\Rightarrow (۲-m)^۲ + m - ۱۵ \geq -۱ \Rightarrow m^۲ - ۴m + ۴ + m - ۱۴ \geq ۰ \Rightarrow \underbrace{m^۲ - ۳m - ۱۰}_{(m-۵)(m+۲)} \geq ۰ \Rightarrow m \geq ۵ \text{ یا } m \leq -۲ \quad (**)$$

گام سوم: از اشتراک شرط‌های (*) و (**) به مجموعه‌جواب $m \geq ۵$ می‌رسیم؛ در نتیجه مجموع مقادیر قابل قبول برای عدد طبیعی تک‌رقمی m برابر با $۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ = ۳۵$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۷۵ پاسخ تشریحی

گام اول: می‌دانیم $(g^{-۱}of^{-۱})(x) = (fog)^{-۱}(x)$ است؛ پس:

$$g^{-۱}of^{-۱}(۴) = -۲ \Rightarrow (fog)^{-۱}(۴) = -۲ \Rightarrow (fog)(-۲) = ۴ \quad (۱)$$

گام دوم: با استفاده از تساوی (۱) و با توجه به ضابطهٔ توابع f و g، مقدار m را به دست می‌آوریم.

$$f(g(-۲)) = ۴ \xrightarrow{f(x)=\frac{x+۲}{x-۱}} \frac{g(-۲)+۲}{g(-۲)-۱} = ۴ \Rightarrow g(-۲)+۲ = ۴g(-۲)-۴ \Rightarrow ۳g(-۲) = ۶ \Rightarrow g(-۲) = ۲$$

$$\xrightarrow{g(x)=x+\sqrt{x+m}} -۲ + \sqrt{-۲+m} = ۲ \Rightarrow \sqrt{m-۲} = ۴ \Rightarrow m - ۲ = ۱۶ \Rightarrow m = ۱۸$$

گام سوم: با توجه به نکتهٔ دوم، از آن‌جایی که در تابع $f(x) = \frac{x+۲}{x-۱}$ شرط $a + d = ۰$ برقرار است، پس $f^{-۱}(x) = f(x) = \frac{x+۲}{x-۱}$ است؛

در نتیجه:

$$(f^{-۱}of^{-۱})(x) = (f^{-۱}of)(x) = x$$

گام چهارم: طبق گام سوم حاصل $(f^{-۱}of^{-۱})(m)$ برابر m می‌شود که ۱۸ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۷۶ پاسخ تشریحی

گام اول: ابتدا ضابطهٔ تابع f را ساده‌تر می‌کنیم، به طوری که بتوانیم از آن معکوس بگیریم (مربع کامل می‌کنیم).

$$f(x) = x^۲(x^۲-۲) \Rightarrow f(x) = x^۴ - ۲x^۲ \Rightarrow f(x) = \underbrace{x^۴ - ۲x^۲ + ۱}_{(x^۲-۱)^۲} - ۱ \Rightarrow f(x) = (x^۲-۱)^۲ - ۱$$

گام دوم: ضابطهٔ معکوس f را حساب می‌کنیم.

$$y = (x^۲-۱)^۲ - ۱ \Rightarrow (x^۲-۱)^۲ = y+۱ \xrightarrow{\text{ریشهٔ دوم می‌گیریم.}} |x^۲-۱| = \sqrt{y+۱} \xrightarrow[x^۲-۱<۰]{\frac{۱}{۲}<x<۱} x^۲ - ۱ = -\sqrt{y+۱}$$

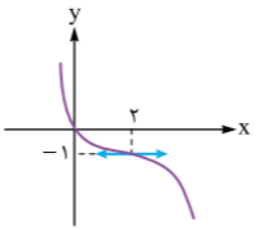
$$\Rightarrow x^۲ = ۱ - \sqrt{y+۱} \xrightarrow{\text{ریشهٔ دوم می‌گیریم.}} |x| = \sqrt{۱-\sqrt{y+۱}} \xrightarrow[۰<x]{\frac{۱}{۲}<x<۱} x = \sqrt{۱-\sqrt{y+۱}}$$

$$\xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را عوض می‌کنیم.}} y = \sqrt{۱-\sqrt{x+۱}} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt{۱-\sqrt{x+۱}}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۷۷ پاسخ تشریحی

گام اول: تابع f یک چندجمله‌ای درجه‌سوم است که اولاً اکیداً نزولی است، دوماً از مبدأ مختصات عبور می‌کند و سوماً در نقطهٔ $(۲,-۱)$ واقع بر آن، مماس افقی دارد؛ پس نمودار آن مطابق شکل مقابل است:



گام دوم: نمودار گام اول از انقباض عمودی نمودار تابع $y=-x^۳$ با ضریب k و هم‌چنین انتقال آن به اندازهٔ ۲ واحد به سمت راست و یک واحد به سمت پایین به دست آمده است؛ پس ضابطهٔ آن به صورت $f(x)=-k(x-۲)^۳-۱$ است $(k>۰)$. چون نمودار از مبدأ مختصات عبور می‌کند؛ پس $f(۰)=۰$ است.

$$-k(۰-۲)^۳-۱=۰ \Rightarrow ۸k=۱ \Rightarrow k=\frac{۱}{۸} \Rightarrow f(x)=-\frac{۱}{۸}(x-۲)^۳-۱$$

گام سوم: معادلهٔ $f(x)=۷$ را حل می‌کنیم.

$$-\frac{۱}{۸}(x-۲)^۳-۱=۷ \Rightarrow -\frac{۱}{۸}(x-۲)^۳=۸ \Rightarrow (x-۲)^۳=-۶۴=(-۴)^۳ \Rightarrow x-۲=-۴ \Rightarrow x=-۲$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۷۸ پاسخ تشریحی

گام اول: عبارت زیر رادیکال را به صورت مربع کامل می‌نویسیم.

$$f(x)=mx+\sqrt{\underbrace{۴x^۲}_{(۲x)^۲}-\underbrace{۲۰x}_{۲\times۵(۲x)}+\underbrace{۲۵}_{۵^۲}} \Rightarrow f(x)=mx+\sqrt{(۲x-۵)^۲} \xrightarrow{\sqrt{u^۲}=|u|} f(x)=mx+|۲x-۵|$$

گام دوم: ضابطهٔ f را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم.

$$f(x)=\begin{cases} mx+۲x-۵ & ۰\le ۲x-۵ \\ mx-۲x+۵ & ۲x-۵<۰ \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} (m+۲)x-۵ & \frac{۵}{۲}\le x \\ (m-۲)x+۵ & x<\frac{۵}{۲} \end{cases}$$

گام سوم: نمودار تابع چندضابطه‌ای f از دو خط تشکیل شده است. برای آن‌که تابع در $\mathbb{R}$ اکیداً یکنوا باشد، باید شیب این دو خط هم‌علامت و غیرصفر باشد، یعنی باید شرط $(m+۲)(m-۲)>۰$ برقرار باشد.

$$۰<m^۲-۴ \Rightarrow ۴<m^۲ \Rightarrow m<-۲ \text{ یا } ۲<m$$

بنابراین پنج مقدار صحیح $\{-۲,-۱,۰,۱,۲\}$ برای m قابل قبول نیست.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۷۹ پاسخ تشریحی

گام اول: تغییرات را مرحله‌به‌مرحله بر روی ضابطهٔ تابع f اعمال می‌کنیم تا ضابطهٔ تابع جدید به دست آید.

$$f(x)=۴\sqrt{x-۳} \xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور عرض‌ها}} y_۱=۴\sqrt{-x-۳} \xrightarrow[y_۲=y_۱-۴]{\text{چهار واحد به سمت پایین}} y_۲=۴\sqrt{-x-۳}-۴$$

فرض می‌کنیم نمودار را k واحد به سمت راست انتقال دهیم:

$$\xrightarrow[x\to x-k]{\text{k واحد انتقال به سمت راست}} y_۳=۴\sqrt{-(x-k)-۳}-۴$$

گام دوم: تابع $y_۳$ باید تابع f را در $x=۴$ قطع کند؛ پس معادلهٔ حاصل از تقاطع آن‌ها، جواب $x=۴$ دارد.

$$۴\sqrt{x-۳}=۴\sqrt{-(x-k)-۳}-۴ \xrightarrow{x=۴} ۴\sqrt{\underbrace{۴-۳}_{۱}}=۴\sqrt{\underbrace{-(۴-k)-۳}_{k-۷}}-۴ \Rightarrow \sqrt{k-۷}=۲ \Rightarrow k-۷=۴ \Rightarrow k=۱۱$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۸۰ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** ابتدا اعضای مجموعهٔ A را می‌نویسیم.

$$A=\{(m,n)|m,n\in\mathbb{Z},|m|+|n|=۴\}$$

$$A=\{(-۴,۰),(۴,۰),(-۳,-۱),(-۳,۱),(-۲,-۲),(-۲,۲),(-۱,-۳),(-۱,۳),(۰,-۴),(۰,۴),(۱,-۳),(۱,۳),(۲,-۲),(۲,۲),(۳,-۱),(۳,۱)\}$$

گام دوم: f زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ A است. برای آن‌که f تابع باشد، باید زوج‌های مرتب متمایز آن، مؤلفهٔ اول تکراری نداشته باشند. برای آن‌که تابع f وارون‌پذیر باشد، باید یک‌به‌یک باشد، پس مؤلفهٔ دوم زوج‌های مرتب آن نیز نباید تکراری باشند. با در نظر گرفتن این شرایط، از میان هر جفت زوج مرتبی که زیر آن‌ها خط کشیده‌ایم باید یکی از آن‌ها را در تابع f قرار دهیم.

گام سوم: حالا می‌توانیم خواستهٔ سؤال را محاسبه کنیم (تابع f در این سؤال یکتا و منحصربه‌فرد نیست)، پس بسته به این‌که f را چه‌طور تشکیل دهیم، مقدار $f(-۳)$ می‌تواند ۱ یا ۱− باشد، ضمن آن‌که مقدار $f^{-۱}(-۳)$ می‌تواند ۱ یا ۱− باشد، پس $(f+f^{-۱})(-۳)=f(-۳)+f^{-۱}(-۳)$ می‌تواند هر یک از مقادیر ۲، ۰ یا ۲− باشد و داریم:

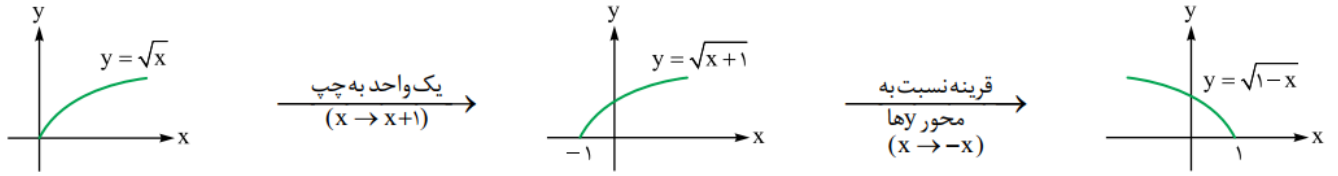
$$(fo(fof^{-۱})(-۳))=f((f+f^{-۱})(۳))=f(۲)\text{ یا }f(-۲)\text{ یا }f(۰)$$

$$\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow$$

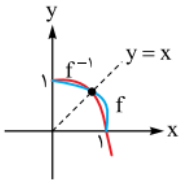
$$۲\text{ یا }-۲\quad ۲\text{ یا }-۲\quad ۴\text{ یا }-۴$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۸۱ **پاسخ تشریحی** راه اول: **گام اول:** ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم. برای رسم نمودار تابع $f(x)=\sqrt{۱-x}$ ابتدا نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را یک واحد به چپ می‌بریم و سپس نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.



گام دوم: نمودار تابع $f^{-۱}$ قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $y=x$ است. این دو نمودار را در یک دستگاه مختصات و در محدودهٔ $۰\le x\le ۱$ رسم می‌کنیم تا تعداد نقاط مشترک آن‌ها به دست آید.



$$f(x)=y=\sqrt{۱-x}\xrightarrow{\text{توان ۲}}y^{۲}=۱-x\Rightarrow x=۱-y^{۲}\xrightarrow[\text{عوض می‌کنیم}]{\text{جای x و y را}}f^{-۱}(x)=۱-x^{۲},\ ۰\le x\le ۱$$

مطابق نمودار، نمودار تابع f با نمودار تابع $f^{-۱}$ در سه نقطه مشترک هستند.

راه دوم: نقاط $(۰,۱)$ و $(۱,۰)$ روی تابع f قرار دارند، پس روی معکوسش نیز قرار دارند. از طرفی تابع f خط $y=x$ را در یک نقطه قطع می‌کند، پس این نقطه نیز روی $f^{-۱}$ وارون آن قرار دارد؛ پس دو تابع f و $f^{-۱}$ سه نقطهٔ مشترک دارند.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۸۲ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** در تساوی $(fog)^{-۱}(۲x-۴)=\frac{x}{۲}$ از تعریف تابع وارون استفاده می‌کنیم و آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(fog)(\frac{x}{۲})=۲x-۴\Rightarrow f(g(\frac{x}{۲}))=۲x-۴\xrightarrow{g(\frac{x}{۲})=۱+۲(\frac{x}{۲})^{۳}}f(۱+۲(\frac{x}{۲})^{۳})=۲x-۴\Rightarrow f(۱+\frac{x^{۳}}{۴})=۲x-۴$$

گام دوم: دوباره از تعریف تابع وارون استفاده می‌کنیم.

$$f^{-۱}(۲x-۴)=۱+\frac{x^{۳}}{۴}\qquad(*)$$

گام سوم: عرض نقطهٔ تقاطع تابع $f^{-۱}$ با محور yها همان $f^{-۱}(۰)$ است. برای به دست آوردن $f^{-۱}(۰)$ باید در تساوی $(*)$ به جای x مقدار ۲ را قرار دهیم:

$$f^{-۱}(۲\times ۲-۴)=۱+\frac{۲^{۳}}{۴}\Rightarrow f^{-۱}(۰)=۳$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۸۳ **پاسخ تشریحی**

گام اول: دامنهٔ تابع $f^{-1}og$ برابر است با: $D_{f^{-1}og}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_{f^{-1}}\}$؛ پس D_g و $D_{f^{-1}}$ را لازم داریم.

گام دوم: طبق نمودار $D_g=[-3,+\infty)$ است.

گام سوم: دامنهٔ تابع f^{-1} همان برد تابع f است. طبق نمودار، برد تابع f برابر با $R_f=[-1,+\infty)$ است؛ پس $D_{f^{-1}}=[-1,+\infty)$ است.

گام چهارم: با داشتن D_g و $D_{f^{-1}}$، دامنهٔ $f^{-1}og$ را مجدد می‌نویسیم.

$$D_{f^{-1}og}=\{x\in[-3,+\infty)\mid \underbrace{g(x)\in[-1,+\infty)}_{(*)}\}$$

گام پنجم: برای بررسی شرط $(*)$، لازم است تابع g را به صورت چندضابطه‌ای بنویسیم.

$$\left.\begin{array}{l} -3\le x\le 2: y-0=\frac{1-0}{2-0}(x-0)\Rightarrow y=\frac{1}{2}x \\ 2\le x: y-0=\frac{1-0}{2-3}(x-3)\Rightarrow y=-x+3 \end{array}\right\}\Rightarrow g(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & ,-3\le x\le 2\\ -x+3 & ,2\le x\end{cases}$$

محل تقاطع هر دو ضابطه با خط $y=-1$ را به دست می‌آوریم.

$$\frac{x}{2}=-1\Rightarrow x=-2$$
$$-x+3=-1\Rightarrow x=4$$

پس طبق نمودار به ازای $-2\le x\le 4$ شرط $(*)$ برقرار است؛ پس $D_{f^{-1}og}=\{-3\le x\mid -2\le x\le 4\}$ است که برابر با $D_{f^{-1}og}=[-2,4]$ است. دامنهٔ $f^{-1}og$ شامل هفت عدد صحیح است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۸۴ **گام اول:** ابتدا تابع g را ساده می‌کنیم.

$$g(x)=۲(۱-\cos x)(۱+\cos x)=۲(۱-\cos^۲ x)=۲\sin^۲ x$$

گام دوم: برد تابع g را به دست می‌آوریم. توجه کنید که برای تابع $f(g(x))$، خروجی‌های تابع g، ورودی‌های تابع f خواهند بود.

$$-۱\le \sin x\le ۱ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۰\le \sin^۲ x\le ۱ \xrightarrow{\times ۲} ۰\le ۲\sin^۲ x\le ۲$$

به عبارت دیگر ورودی‌های تابع f در بازهٔ $[۰,۲]$ خواهند بود.

گام سوم: حال باید Max و Min تابع f را در دامنهٔ $[۰,۲]$ به دست آوریم. ابتدا نقاط بحرانی تابع f را به دست می‌آوریم. برای این منظور $f'(x)$ را حساب کرده و ریشه‌های $f'(x)=۰$ را به دست می‌آوریم.

$$f(x)=x^۳-۴x+۱$$

$$f'(x)=۳x^۲-۴ \xrightarrow{f'(x)=۰} ۳x^۲-۴=۰ \Rightarrow x^۲=\frac{۴}{۳} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۲}{\sqrt{۳}} \\ x=-\frac{۲}{\sqrt{۳}} \text{ غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

توجه کنید که تنها $x=\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ در محدودهٔ $[۰,۲]$ قرار دارد و قابل قبول است.

گام چهارم: نقاط بحرانی تابع $x=۰$، $x=\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ و $x=۲$ هستند. مقدار تابع f را در این نقاط به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} f(۰)=۱ \Rightarrow \text{Max} \\ f(\frac{۲}{\sqrt{۳}})=(\frac{۲}{\sqrt{۳}})^۳-۴(\frac{۲}{\sqrt{۳}})+۱=\frac{۸}{۳\sqrt{۳}}-\frac{۸}{\sqrt{۳}}+۱=۱-\frac{۱۶}{۳\sqrt{۳}} \Rightarrow \text{Min} \\ f(۲)=۲^۳-۴(۲)+۱=۱ \Rightarrow \text{Max} \end{cases}$$

گام پنجم: مجموع بیشترین و کم‌ترین مقدار تابع $fog(x)$ برابر با $۲-\frac{۱۶}{۳\sqrt{۳}}$ می‌شود.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۸۵ **پاسخ تشریحی**

گام اول: ابتدا دامنهٔ تابع f را به دست می‌آوریم.

$$D_f: \begin{cases} x-1\geq 0 \Rightarrow 1\leq x \\ 5-x\geq 0 \Rightarrow x\leq 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 1\leq x\leq 5$$

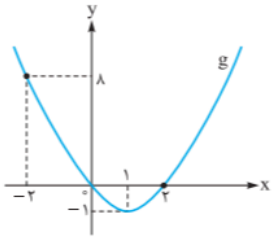
گام دوم: تابع $y=\sqrt{x-1}$ یک تابع اکیداً صعودی است. از طرفی تابع $y=\sqrt{5-x}$ یک تابع اکیداً نزولی و قرینهٔ آن یعنی $y=-\sqrt{5-x}$ یک تابع اکیداً صعودی است. هم‌چنین می‌دانیم مجموع دو تابع اکیداً صعودی، اکیداً صعودی است؛ پس:

$f(x)=\underbrace{\sqrt{x-1}}_{\text{اکیداً صعودی}}+\underbrace{(-\sqrt{5-x})}_{\text{اکیداً صعودی}} \Rightarrow f(x)$ اکیداً صعودی است.

گام سوم: چون تابع f اکیداً صعودی است؛ پس بُرد آن در بازهٔ $[1,5]$ به صورت $[f(1),f(5)]$ است.

$$\left.\begin{matrix} f(1)=\sqrt{1-1}-\sqrt{5-1}=-2 \\ f(5)=\sqrt{5-1}-\sqrt{5-5}=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow R_f=[-2,2]$$

گام چهارم: در تابع $gof(x)=g(f(x))$، خروجی‌های تابع f به عنوان ورودی برای تابع g هستند؛ پس برای پیداکردن بُرد تابع gof، باید برد تابع g را به ازای دامنهٔ $[-2,2]$ به دست آوریم. برای این کار از نمودار تابع g استفاده می‌کنیم. برای رسم نمودار تابع g توجه کنید که این سهمی محور xها را در دو نقطه به طول‌های $x=0$ و $x=2$ قطع می‌کند و طول رأس آن $x=1$ است.



$$g(1)=1^2-2(1)=-1$$

$$g(-2)=(-2)^2-2(-2)=8$$

$$g(2)=0$$

در نتیجه $R_{gof}=[-1,8]$ است و برد تابع gof شامل ۱۰ عدد صحیح است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۸۶ **پاسخ تشریحی**

گام اول: از این‌که $g^{-1}(f(x))=\sqrt{5x+2}$ است، می‌توانیم نتیجه بگیریم که:

$$g^{-1}(\underbrace{f(x)}_{\alpha})=\underbrace{\sqrt{5x+2}}_{\beta} \xrightarrow{g^{-1}(\alpha)=\beta \Leftrightarrow \alpha=g(\beta)} f(x)=g(\sqrt{5x+2})$$

گام دوم: در معادلهٔ $f(g(x))=3x^2-1$، به جای x قرار می‌دهیم $\sqrt{5x+2}$:

$$\Rightarrow f(g(\sqrt{5x+2}))=3(\sqrt{5x+2})^2-1=3\times(5x+2)-1=15x+5 \Rightarrow f(g(\sqrt{5x+2}))=15x+5$$

گام سوم: با جای‌گذاری $f(x)=g(\sqrt{5x+2})$ در معادلهٔ بالا داریم:

$$f(f(x))=15x+5$$

گام چهارم: تابع بالا را وارون می‌کنیم:

$$f(f(x))=15x+5 \xrightarrow{f(f(x))=y} y=15x+5 \xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ عوض}} x=15y+5$$

$$\Rightarrow 15y=x-5 \Rightarrow y=\frac{x-5}{15}$$

پس:

$$(f(f(x)))^{-1}=\frac{x-5}{15}$$

گام پنجم: از طرفی $(f(f(x)))^{-1}=f^{-1}(f^{-1}(x))$ است؛ پس:

$$f^{-1}(f^{-1}(x))=\frac{x-5}{15} \Rightarrow f^{-1}(f^{-1}(0))=\frac{0-5}{15}=-\frac{1}{3}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۸۷ پاسخ تشریحی **گام اول:** باید منحنی‌ها را با هم قطع بدهیم. مقدار $x=\sqrt{۲y-۱۲}+\sqrt{۹-y}$ را در معادلهٔ $y=x^۲-۱$ قرار می‌دهیم.

$$y=(\sqrt{۲y-۱۲}+\sqrt{۹-y})^۲-۱\Rightarrow ۲y-۱۲+۹-y+۲\sqrt{(۲y-۱۲)(۹-y)}-۱=y$$

$$\Rightarrow y=y-۴+۲\sqrt{(۲y-۱۲)(۹-y)}\ \Rightarrow ۲\sqrt{(۲y-۱۲)(۹-y)}=۴$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}}(۲y-۱۲)(۹-y)=۴\ \Rightarrow\ ۱۸y-۲y^۲-۱۰۸+۱۲y=۴$$

$$\Rightarrow\ y^۲-۱۵y+۵۶=۰\ \Rightarrow\ (y-۷)(y-۸)=۰\ \Rightarrow\ \begin{cases}y=۷\\y=۸\end{cases}$$

گام دوم: هر دو مقدار y به‌دست‌آمده را در $y=x^۲-۱$ قرار می‌دهیم تا x را به دست آوریم. «با توجه به ضابطهٔ اول، می‌دانیم که $x>۰$ است»

$$y=۷: x^۲=۸\ \Rightarrow\ x=\pm ۲\sqrt{۲}$$

$$y=۸: x^۲=۹\ \Rightarrow\ x=\pm ۳$$

از آن‌جایی که هر دو مؤلفهٔ مختصات A، عددی صحیح است و $x>۰$ پس $A(۳,۸)$ قابل قبول است.

گام سوم: فاصلهٔ نقطهٔ A از $(-۱,۵)$ را می‌یابیم:

$$A(۳,۸): d=\sqrt{(۳-۵)^۲+(۸+۱)^۲}=\sqrt{۴+۸۱}=\sqrt{۸۵}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۸۸ پاسخ تشریحی **گام اول:** تابع خطی f را به صورت $f(x)=ax+b$ در نظر می‌گیریم که با توجه به نزولی‌بودن آن، $a<۰$ است. وارون این تابع را به دست می‌آوریم:

$$y=ax+b\Rightarrow x=\frac{y-b}{a}\xrightarrow{\text{جای x و y عوض شود.}}f^{-۱}(x)=\frac{x-b}{a}$$

گام دوم: حالا از عبارت داده‌شده استفاده می‌کنیم:

$$f^{-۱}(۱-۲x)=۱-۲f(x)\ \Rightarrow\ \frac{۱-۲x-b}{a}=۱-۲(ax+b)\ \Rightarrow\ \frac{-۲}{a}x+\frac{۱-b}{a}=-۲ax+(۱-۲b)$$

گام سوم: با توجه به اینکه تساوی گفته‌شده اتحاد است، ضرایب $x^۱$ و $x^۰$ را در تساوی حاصل در گام دوم، برابر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases}\frac{-۲}{a}=-۲a\\ \frac{۱-b}{a}=۱-۲b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^۲=۱\ \Rightarrow\ a=\pm ۱\xrightarrow{a<۰}a=-۱\\ \frac{۱-b}{-۱}=۱-۲b\ \Rightarrow\ b-۱=۱-۲b\ \Rightarrow\ b=\frac{۲}{۳}\end{cases}$$

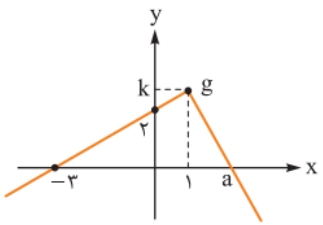
گام چهارم: بنابراین $f(x)=-x+\frac{۲}{۳}$ به دست می‌آید. مقدار $g(۰)$ را می‌خواهیم؛ پس $f(x)=۰$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=۰=-x+\frac{۲}{۳}\ \Rightarrow\ x=\frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow\ g(۰)=g(f(\frac{۲}{۳}))=۹\times\frac{۴}{۹}+۳\times\frac{۲}{۳}=۴+۲=۶$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۸۹ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** ابتدا از روی نمودار، ضابطهٔ تابع g را به دست می‌آوریم:



$$g(x)=\begin{cases}\frac{۲}{۳}x+۲ & x<۱\\ \frac{-k}{a-۱}x+\frac{ak}{a-۱} & x\geq ۱\end{cases}$$

با توجه به این‌که $x=۱$ در ضابطهٔ اول نیز صدق می‌کند، می‌توانیم مقدار k را به دست آوریم:

$$g(۱)=\frac{۲}{۳}+۲=\frac{۸}{۳}=k \Rightarrow x\geq ۱: \frac{-۸}{۳(a-۱)}x+\frac{۸a}{۳(a-۱)}$$

گام دوم: حالا به کمک f و g، تابع $f-g$ را به دست می‌آوریم که تابعی ثابت است:

$$(f-g)(x)=\begin{cases}(c-\frac{۲}{۳})x-۱ & x<۱\\ (۲+\frac{۸}{۳(a-۱)})x-b-\frac{۸a}{۳(a-۱)} & x\geq ۱\end{cases}$$

ضریب x باید صفر باشد و مقدار تابع به ازای $x<۱$ و $x\geq ۱$ برابر باشد:

$$c-\frac{۲}{۳}=۰ \Rightarrow c=\frac{۲}{۳}$$

$$۲+\frac{۸}{۳(a-۱)}=۰ \Rightarrow a=-\frac{۱}{۳}$$

$$-b-\frac{۸a}{۳(a-۱)}=-۱ \Rightarrow b=۱-\frac{\frac{-۸}{۳}}{۳(-\frac{۴}{۳})}=۱-\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۳}$$

گام سوم: حاصل abc برابر با $-\frac{۲}{۲۷}$ می‌شود.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۹۰ در این سؤال برای محاسبه دامنه تابع $g(x)=\sqrt{\frac{f(1-x)}{f(x+1)}}$ باید داشته باشیم:

(۱) حالت: $f(1-x)\geq 0 \ , \ f(x+1)>0$

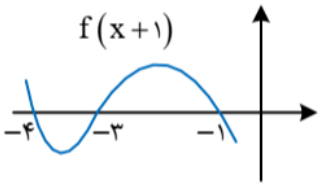
(۲) حالت: $f(1-x)\leq 0 \ , \ f(x+1)<0$

برای محاسبه ۲ حالت فوق، باید نمودار توابع $f(1-x)$ و $f(x+1)$ را داشته باشیم. پس در ابتدا از روی نمودار تابع $f(x-2)$، نمودار $f(x)$ را به‌دست آورده و سپس از روی آن، نمودار ۲ تابع خواسته شده را به‌دست می‌آوریم.

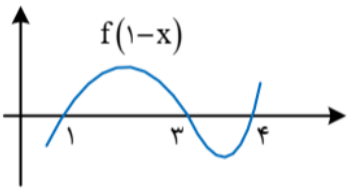


حال نمودار توابع $f(x+1)$ و $f(1-x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$f(x) \xrightarrow[\text{به چپ}]{\text{انتقال ۱ واحد}} f(x+1)$



$f(x) \xrightarrow[\text{به چپ}]{\text{انتقال ۱ واحد}} f(x+1) \xrightarrow[\text{به محور yها}]{\text{قرینه نسبت}} f(-x+1)$



حالت ۱: $f(1-x)\geq 0$ و $f(x+1)>0$

$$\left.\begin{array}{l} f(1-x)\geq 0 \Rightarrow x\in[1,3]\cup[4,+\infty) \\ f(1+x)>0 \Rightarrow x\in(-\infty,-4)\cup(-3,-1) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \varnothing \quad (1)$$

حالت ۲: $f(1-x)\leq 0$ و $f(x+1)<0$

$$\left.\begin{array}{l} f(1-x)\leq 0 \Rightarrow x\in(-\infty,1]\cup[3,4] \\ f(1+x)<0 \Rightarrow x\in(-4,-3)\cup(-1,+\infty) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} (-4,-3)\cup(-1,1]\cup[3,4] \quad (2)$$

اجتماع (۱) و (۲) همان ۲ می‌شود و شامل ۴ عدد صحیح ۰، ۱، ۳ و ۴ می‌باشد.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۹۱

$$fog\left(-\frac{1}{3}\right)=f\left(g\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=f\left(f\left(\left[-\frac{1}{3}-f\left(-\frac{1}{3}\right)\right]\right)\right)=f\left(f\left(\left[-\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}+\left[-\frac{1}{3}\right]\right)\right]\right)\right)$$

$$=f\left(f\left([1]\right)\right)=f\left(1+[1]\right)=f(2)=2+[2]=4$$

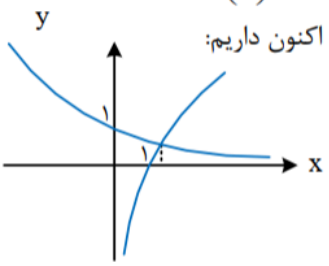
(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۹۲ $f(x)=\left(\left(\frac{۱}{۲}\right)^x+\log_{/۵}^x\right)^۳$ نزولی است. به ترتیب صعودی و نزولی هستند. پس ترکیب آن‌ها یعنی $\left(\frac{۱}{۲}\right)^x+\log_{/۵}^x$

تابع $\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ و $\log_{/۵}^x$ توابعی نزولی هستند، پس تابع $\left(\frac{۱}{۲}\right)^x+\log_{/۵}^x$ نیز نزولی است.

$$D_{fof}=\{x\in D_f : f(x)\in D_f\}$$

اکنون داریم:



$$D_f=(۰,+\infty)\xrightarrow{f(x)\in D_f}\left(\left(\frac{۱}{۲}\right)^x+\log_{/۵}^x\right)^۳>۰$$

$$\Rightarrow\left(\frac{۱}{۲}\right)^x+\log_{/۵}^x>۰\Rightarrow(۰/۵)^x>-\log_{/۵}^x\Rightarrow(۰/۵)^x>\log_۲^x\Rightarrow x\in(۰,\alpha),\alpha>۱$$ رابطه (*)

$$(fof)(x)<f\left(۲^{-۳x}\right)\xrightarrow{\text{نزولی } f} f(x)>۲^{-۳x}\Rightarrow\left(\left(\frac{۱}{۲}\right)^x+\log_{/۵}^x\right)^۳>\left(۲^{-x}\right)^۳$$

$$\xrightarrow{x^۳\text{صعودی}}\left(\frac{۱}{۲}\right)^x+\log_{/۵}^x>۲^{-x}\Rightarrow\log_{/۵}^x>۰\Rightarrow ۰<x<۱\xrightarrow{\text{اشتراک با (*)}}۰<x<۱$$

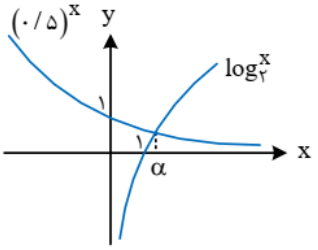
(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۹۳ تابع $\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ و $\log_{/۵}^x$ توابعی نزولی هستند، پس تابع $\left(\frac{۱}{۲}\right)^x+\log_{/۵}^x$ نیز نزولی است.

تابع $x^۳$ و $\left(\frac{۱}{۲}\right)^x+\log_{/۵}^x$ به ترتیب صعودی و نزولی هستند. پس ترکیب آن‌ها یعنی $\left(\left(\frac{۱}{۲}\right)^x+\log_{/۵}^x\right)^۳$ نزولی است.

اکنون داریم:

$$D_{fof}=\{x\in D_f : f(x)\in D_f\}$$



$$D_f=(۰,+\infty)\xrightarrow{f(x)\in D_f}\left(\left(\frac{۱}{۲}\right)^x+\log_{/۵}^x\right)^۳>۰$$

$$\Rightarrow\left(\frac{۱}{۲}\right)^x+\log_{/۵}^x>۰\Rightarrow(۰/۵)^x>-\log_{/۵}^x\Rightarrow(۰/۵)^x>\log_۲^x\Rightarrow x\in(۰,\alpha),\alpha>۱$$ رابطه (*)

$$(fof)(x)<f\left(۲^{-۳x}\right)\xrightarrow{\text{نزولی } f} f(x)>۲^{-۳x}\Rightarrow\left(\left(\frac{۱}{۲}\right)^x+\log_{/۵}^x\right)^۳>\left(۲^{-x}\right)^۳$$

$$\xrightarrow{x^۳\text{صعودی}}\left(\frac{۱}{۲}\right)^x+\log_{/۵}^x>۲^{-x}\Rightarrow\log_{/۵}^x>۰\Rightarrow ۰<x<۱\xrightarrow{\text{اشتراک با (*)}}۰<x<۱$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۹۴ ابتدا ضابطه تابع f را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

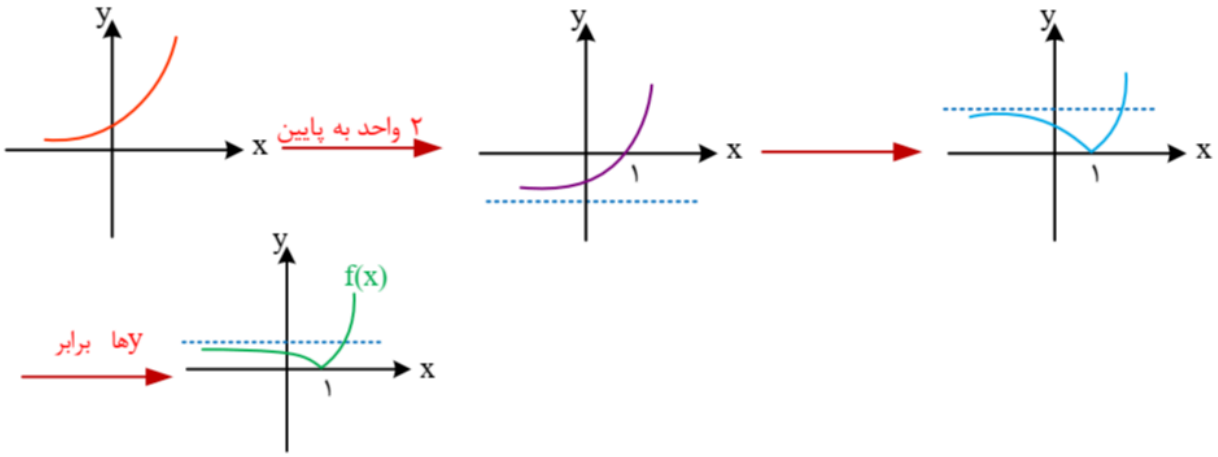
$$f(x)=\sqrt{۴^{x-۱}-۲^x+۱}=\sqrt{(۲^۲)^{x-۱}-۲^x+۱}=\sqrt{(۲^{x-۱})^۲-۲^x+۱}=\sqrt{(\frac{۲^x}{۲})^۲-۲^x+۱}$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{(۲^x)^۲}{۴}-۲^x+۱}=\sqrt{\frac{(۲^x)^۲-(۴\times ۲^x)+۴}{۴}}=\frac{۱}{۲}\sqrt{(۲^x)^۲-۴\times ۲^x+۴}$$

حال ۲^x را برابر t فرض کرده و داریم:

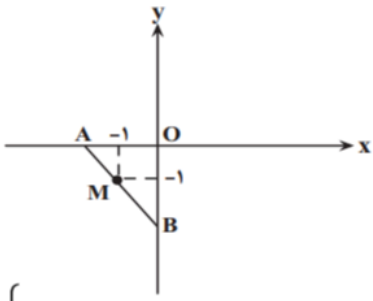
$$\frac{۱}{۲}\sqrt{t^۲-۴t+۴}=\frac{۱}{۲}\sqrt{(t-۲)^۲}=\frac{۱}{۲}|t-۲|\xrightarrow{۲^x=t}f(x)=\frac{۱}{۲}|۲^x-۲|$$

حال برای رسم تابع f، داریم:



(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۹۵ معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $M(-۱,-۱)$ با شیب دلخواه **m** به‌صورت زیر است



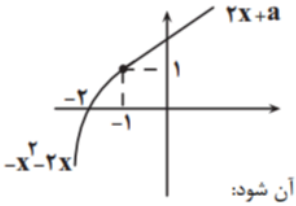
$$y+۱=m(x+۱)\Rightarrow y=mx+m-۱$$

اندازهٔ **OA** و **BO** با جایگذاری صفر به ترتیب به‌جای **y** و **x** به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} x=۰\Rightarrow y=m-۱\Rightarrow OB=|y|=۱-m \\ y=۰\Rightarrow ۰=mx+m-۱\Rightarrow x=\dfrac{۱-m}{m} \\ \Rightarrow OA=|x|=\dfrac{m-۱}{m} \Rightarrow S=\dfrac{۱}{۲}\times(\dfrac{۱-m}{m})(m-۱)=\dfrac{-(m-۱)^۲}{۲m} \end{cases}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۹۶ بهترین راه برای فهم و حل این سوال رسم نمودار تابع است.



حداقل مقدار $۲x+a$ در نقطهٔ ابتدایی خود به ازای $x=-۱$ باید از حداکثر مقدار تابع درجهٔ ۲ در نقطهٔ $x=-۱$ بیش‌تر یا مساوی آن شود:

$$۱ \le -۲+a \to ۳ \le a$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۹۷ در ابتدا برای پیدا کردن مجموعه جواب بایستی ریشه صورت و مخرج کسر را پیدا کنیم بنابراین داریم:

$$\frac{x^۲+۴x+۳}{-|x|-۱}>۰$$

$x=-۱$ و $x=-۳$ ریشهٔ صورت کسر می‌باشند ولی $-|x|-۱$ عبارتی همواره منفی است در نتیجه خواهیم داشت:

x		−۳		−۱	
عبارت	−	۰	+	۰	−

مجموعه جواب نامعادله به‌صورت بازهٔ $(-۳,-۱)$ است.

از طرفی می‌دانیم که هرگاه $a<x<b \leftarrow$ آن‌گاه $|x-\frac{a+b}{۲}|<\frac{b-a}{۲}$ می‌باشد.

با توجه به نکتهٔ فوق خواهیم داشت:

$$-۳<x<-۱ \to |x-(\frac{-۳-۱}{۲})|<\frac{-۱-(-۳)}{۲} \to |x+۲|<۱$$

در نتیجه: $۰<|x+۲|-۱$ می‌باشد پس $a=-۲$ و $b=۱$ می‌باشد آن‌گاه:

$$a+b=-۲+۱=-۱$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۹۸ ابتدا ضابطهٔ تابع خطی f را معکوس می‌کنیم:

$$y=x+۳ \Rightarrow y-۳=x \to f^{-۱}(x)=x-۳$$

حالا داریم:

$$g(f^{-۱}(x))=(x-۳)^۲-۵(x-۳)+۱$$
$$\Rightarrow g(f^{-۱}(x))=x^۲-۶x+۹-۵x+۱۵+۱=x^۲-۱۱x+۲۵=۰$$
$$S=x_۱+x_۲=\frac{-b}{a}=۱۱$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۹۹ با توجه به اینکه f تابعی یک به یک می‌باشد، لذا داریم:

$$f(x+۲f(x))=f(۵x+۲) \Rightarrow x+۲f(x)=۵x+۲$$
$$\Rightarrow ۲f(x)=۴x+۲ \Rightarrow f(x)=۲x+۱$$
$$f(f(x))=۲(۲x+۱)+۱=۴x+۳$$
$$\Rightarrow f(f(۰))=۴(۰)+۳=۳$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۰۰

$$f(x)=\frac{۱}{۲}x+۳ \Rightarrow f^{-۱}(x)=۲x-۶$$
$$g(x)=\frac{-۱}{۴}x+۱ \Rightarrow g^{-۱}(x)=-۴x+۴$$
$$\frac{g^{-۱}}{f^{-۱}}=\frac{-۴x+۴}{۲x-۶}=-۳ \Rightarrow x=۷$$

۷ مجموعه اعداد اول کوچکتر از $=\{۲,۳,۵\}$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۰۱ تمام توابع خواسته شده را ابتدا به‌دست می‌آوریم:

$$f^{-1}=\{(1,-1)(2,1)(3,2)(-1,0)\}$$
$$f^{2}=\{(-1,1)(1,4)(2,9)(0,1)\}$$
$$f^{-1}o(f^{2})=\{(-1,-1)(0,-1)\}$$
$$f-1=\{(-1,0)(1,1)(2,2)(0,-2)\}$$

حالا خواهیم داشت:

$$\frac{f^{-1}o(f^{2})}{f-1}=\{(-1,\frac{-1}{0})(0,\frac{1}{2})\}$$

که تنها عضو قابل قبول آن $(0,\frac{1}{2})$ است که مجموع دامنه و برد آن $0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ است.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۰۲ برای یافتن تابع g، در تابع $f^{-1}(x)$ به‌جای x، $x+4$ قرار می‌دهیم:

$$f(x)\xrightarrow{\text{وارون}}f^{-1}(x)\xrightarrow[\text{به سمت چپ}]{\text{۴ واحد}}f^{-1}(x+4)\rightarrow g(x)=f^{-1}(x+4)$$

تلاقی تابع $f^{-1}(x+4)$ و $x-3$ را می‌یابیم:

$$f^{-1}(x+4)=x-3\xrightarrow{\text{از دو طرف f می‌گیریم}}f(f^{-1}(x+4))=f(x-3)\rightarrow x+4=f(x-3)$$

با در نظر گرفتن $f(x)=-x+\sqrt{x+4}$ داریم:

$$x+4=-(x-3)+\sqrt{x-3+4}\rightarrow 2x+1=\sqrt{x+1}\rightarrow(2x+1)^{2}=(\sqrt{x+1})^{2}$$

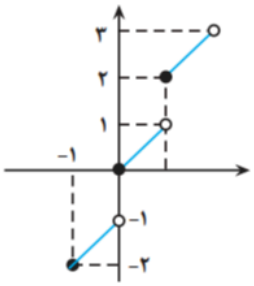
$$\Rightarrow 4x^{2}+4x+1=x+1\rightarrow 4x^{2}+3x=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\ x=\frac{-3}{4}\end{cases}\text{ غ ق ق}$$

پس فقط در یک نقطه برخورد دارند.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۰۳ اول اینکه می‌دانیم $x\in R_f$، $fof^{-1}(x)=x$ پس باید برد تابع $f(x)$ را پیدا کنیم.

$$f(x)=x+[x]$$



مطابق شکل برد همهٔ اعداد بین دو عدد متوالی است که ابتدای بازه عـدد زوج و انتهـای بازه فرد است.

$$R_f=\ldots\cup[-2,-1)\cup[0,1)\cup[2,3)\cup[4,5)\cup\ldots$$

حالا حل معادله:

$$x=x^{4}-2x^{2}+x\rightarrow x=0,\sqrt{2},-\sqrt{2}\xrightarrow{\text{مجموع ریشه‌های قابل قبول}}-\sqrt{2}$$

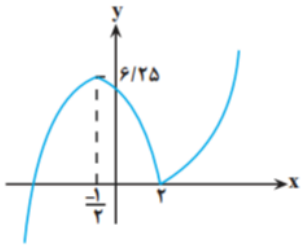
دقت کنید که $x=\sqrt{2}$ جزو R_f نمی‌باشد.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۰۴ با ساده‌سازی تابع داریم:

$$f(x)=(3+x)|x-2|\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x^{2}+x-6 & ,x\geq 2\\ -(x^{2}+x-6), & x<2\end{cases}$$

با رسم تابع چند ضابطه‌ای داریم:



در بازهٔ نزولی تابع یعنی $x\in[-\frac{1}{2},2]$ مقادیر متمایز ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ برای $[f(x)]$ موجود است.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

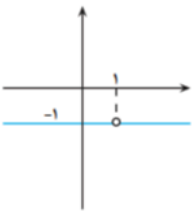
۳۰۵ ابتدا تابع f را به‌صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم، سپس ضابطهٔ $f(g(x))$ را به‌دست می‌آوریم.

$$f(x)=\frac{|x-۲|}{x-۲}=\begin{cases}\frac{x-۲}{x-۲}=۱ & x>۲\\ \frac{-(x-۲)}{x-۲}=-۱ & x<۲\end{cases}$$

می‌دانیم که در تابع $f(g(x))$، خروجی تابع g، ورودی تابع f است. بنابراین برد (خروجی) هر کدام از ضابطه‌های $g(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l}x>۱\to x^۲>۱\to -x^۲<-۱\to -x^۲+۲<۱\\ \xrightarrow{g(x)<۱} f(g(x))=-۱\\ x<۱\to ۲x<۲\to ۲x-۳<-۱\\ \xrightarrow{g(x)<-۱} f(g(x))=-۱\end{array}\right\}\Rightarrow f(g(x))=-۱$$

$$D_{fog}=R-\{۱\}$$



واضح است که تابع fog در همهٔ نقاط از دامنهٔ خود حد دارد.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۰۶ با توجه به ضابطهٔ تابع f، یک تابع اکیداً نزولی می‌باشد. بنابراین:

$$f(a)=a+۳\to -(a+۱)^۳+۲=a+۳\to (a+۱)^۳+a+۱=۰$$

$$\to (a+۱)((a+۱)^۲+۱)=۰\to\begin{cases}a=-۱ & \text{قابل‌قبول}\\ (a+۱)^۲=-۱ & \text{غ‌ق‌ق}\end{cases}$$

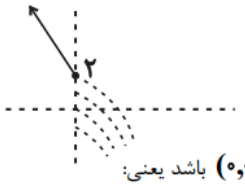
و داریم:

$$f(۱)=\to -(۱+۱)^۳+۲=b\to b=-۶$$

$$\begin{cases}a=-۱\\ b=-۶\end{cases}\to a-b=-۱-(-۶)=۵$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۰۷ با توجه به گزینه‌ها $g(x)=ax+b$ فرض می‌کنیم. به ازای $x\le ۰$ تابع $-x+۲$ اکیداً نزولی است. پس: $ax+b-(x+۱)^۲$ به ازای $x=۰$ باید کوچک‌تر یا مساوی ۲ باشد.



$$a(۰)+b-(۰+۱)^۲\le ۲\to b\le ۳$$

ثانیاً برای اینکه نمودار $(ax+b)-(x+۱)^۲$ اکیداً نزولی باشد طول رأس سهمی $y=-x^۲+(a-۲)x+b-۱$ باید خارج بازه $(۰,+\infty)$ باشد یعنی:

$$\frac{a-۲}{۲}\le ۰\to a\le ۲$$

با توجه به دو شرط $a\le ۲$ و $b\le ۳$ فقط گزینهٔ ۴ قابل‌قبول نمی‌باشد.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۰۸ ترکیب تابع اکیداً صعودی با تابع اکیداً نزولی، اکیداً نزولی است و تابع اکیداً نزولی هر چه ورودی‌اش کمتر باشد، مقدارش بیشتر است.

$$fog(x^۳)-fog(۴x)>۰$$

$$\to x^۳<۴x\to x^۳-۴x<۰\to x(x^۲-۴)<۰\to x(x-۲)(x+۲)<۰$$

	-۲		۰		۲	
	$-$	$+$	$-$	$+$		

$$D=(-\infty,-۲)\cup(۰,۲)$$

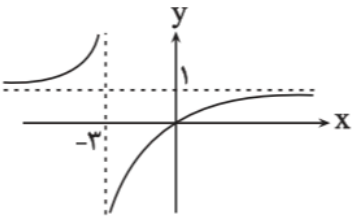
در اعداد صحیح منفی، -۱ و -۲ جزء دامنه نیستند.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۰۹ طبق تعریف داریم:

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in[۳,۶)\mid \frac{x}{x+۳}\in[-۲,۳]\}$$

$$y=\frac{x}{x+۳}\xrightarrow{\text{رسم شکل}}$$



$$x=۳\to y=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$
$$x=۶\to y=\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳}$$
$$\to R_f=[\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۳})$$

پس، به ازای تمامی اعداد دامنه، عبارت $\frac{x}{x+۳}$ در بازه $[-۲,۳]$ قرار می‌گیرد.

$$D_{gof}=[۳,۶)\to \text{شامل سه عدد صحیح است}=\{۳,۴,۵\}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱۰ می‌دانیم که $g(f^{-۱}(a))=۳$ می‌باشد، پس:

$$\frac{x+۳}{x-۱}=۳\to ۳x-۳=x+۳\to ۲x=۶\to x=۳$$

در نتیجه $f^{-۱}(a)=۳$ می‌باشد. بنابراین $f(۳)=a$، آن‌گاه با جایگذاری در ضابطه داریم:

$$f(۳)=۲-۳=-۱$$

در نتیجه $a=-۱$ می‌باشد.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱۱ می‌دانیم اگر $f(\alpha)=\beta$ باشد در نتیجه $\alpha=f^{-۱}(\beta)$ می‌شود. در نتیجه از طرفین معادلهٔ زیر f می‌گیریم:

$$f^{-۱}(x)=x-۱$$
$$x=f(x-۱)$$

حالا با جایگذاری $x-۱$ در تابع داده‌شده و حل معادله خواهیم داشت:

$$x=f(x-۱)\to x=۲(x-۱)^۲-(x-۱)-۲۳$$

$$۲x^۲-۶x-۲۰=۰\to(۲x-۱۰)(x+۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۵\\x=-۲\end{cases}\quad x\geq ۲\to ۵\to y=x-۱=۴\to A(۵,۴)\quad OA=\sqrt{۵^۲+۴^۲}=\sqrt{۴۱}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱۲

$$fog(x)=g(x)\xrightarrow{\text{از طرفین } f^{-۱} \text{ می‌گیریم}}f^{-۱}(f(g(x)))=f^{-۱}(g(x))\Rightarrow g(x)=f^{-۱}(g(x))$$

$$ax+۲=\frac{۲x+۲}{x-۳}\to ax^۲-۳ax+۲x-۶=۲x+۲\quad\Rightarrow ax^۲-۳ax-۸=۰$$

شرط اینکه معادله اخیر یک جواب داشته باشد این است که $\Delta=۰$. پس:

$$۹a^۲-۴a(-۸)=۰\quad ۹a^۲+۳۲a=۰\xrightarrow{a\neq ۰}a=\frac{-۳۲}{۹}$$

دقت کنید که به ازای $a=۰$ به معادلهٔ $-۸=۰$ می‌رسیم که ممکن نیست.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱۳ اگر نمودار تابع $y=\sqrt{-x}$ را یک واحد به چپ منتقل کنیم نمودار تابع $y=\sqrt{-(x+۱)}=\sqrt{-x-۱}$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم نمودار تابع $y=\sqrt{x-۱}$ می‌شود. و اگر مجدداً این نمودار را یک واحد به چپ منتقل کنیم نمودار تابع $y=\sqrt{(x+۱)-۱}=\sqrt{x}$ به‌دست می‌آید.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱۴

$$\begin{cases} x = gof(\frac{-۵}{۳}) = g(f(\frac{-۵}{۳})) = g(\frac{۱}{۳}) = \frac{۱}{\frac{۱}{۳}} = ۳ \\ f(\frac{-۵}{۳}) = \frac{-۵}{۳} + ۲ = \frac{-۵+۶}{۳} = \frac{۱}{۳} \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(۳) = ۳^۲ - ۱ = ۹ - ۱ = ۸ \\ (fog)(۳) = f(g(۳)) \Rightarrow f(۸) = \sqrt{۸+۳} = \sqrt{۱۱} \end{cases}$$

$$[(fog)(۳)] = [\sqrt{۱۱}] = ۳$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

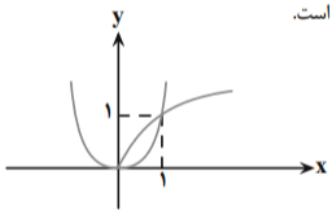
۳۱۵ طبق تعریف دامنهٔ fof داریم:

$$D_{fof} = \{x \mid x \in D_f, f(x) \in D_f\}$$

$$f(x) = \sqrt{x} - x^۲ \Rightarrow D_f : x \geq ۰ = [۰, +\infty]$$

$$\Rightarrow D_{fof} = \{x \mid \underbrace{x \geq ۰}_{①}, \underbrace{\sqrt{x} - x^۲ \geq ۰}_{②}\}$$

برای حل نامعادلهٔ، از روش هندسی و رسم نمودار استفاده می‌کنیم با توجه به نمودار دو تابع، در بازهٔ $[۰,۱]$ نامعادلهٔ $\sqrt{x} \geq x^۲$ برقرار است.



$$\Rightarrow ① \cap ② = [۰, +\infty] \cap [۰,۱] = [۰,۱]$$

بنابراین دامنهٔ fof شامل دو عدد صحیح $\{۰,۱\}$ است.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱۶ در ابتدا معادلهٔ $۴x - ۵ = ۳$ را حل می‌کنیم و به $x = ۲$ می‌رسیم پس داریم: $f(۲) = ۳$ حالا در f جایگذاری می‌کنیم:

$$\sqrt{۲^۲ + m\sqrt{۲-۱}} = ۳ \rightarrow ۴ + m = ۹ \rightarrow m = ۵$$

یعنی داریم: $f(x) = \sqrt{x^۲ + ۵\sqrt{x-۱}}$ حالا $f(۵)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(۵) = \sqrt{۲۵ + ۵(۲)} = \sqrt{۳۵} \rightarrow (f(۵))^۲ = ۳۵ \rightarrow f((f(۵))^۲ - ۳۴) = f(۳۵ - ۳۴) = f(۱) = \sqrt{۱ + ۵ \times ۰} = ۱$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱۷ ابتدا تابع $(gof)(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x) = ۳x^۲ + x - ۲$$

$$g(x) = x^۲ + ۴x + ۳ \Rightarrow (gof)(x) = g(f(x)) = g(۳x^۲ + x - ۲) = (۳x^۲ + x - ۲)^۲$$

$$+۴(۳x^۲ + x - ۲) + ۳ \Rightarrow (gof)(x) = ۰ \Rightarrow (۳x^۲ + x - ۲)^۲ + ۴(۳x^۲ + x - ۲) + ۳ = ۰$$

به کمک تغییر متغیر $۳x^۲ + x - ۲ = t$ معادله را حل می‌کنیم:

$$\Rightarrow t^۲ + ۴t + ۳ = ۰ \Rightarrow (t+۳)(t+۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t + ۳ = ۰ \Rightarrow t = -۳ \\ t + ۱ = ۰ \Rightarrow t = -۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow t = -۳ \Rightarrow ۳x^۲ + x - ۲ = -۳$$

$$\Rightarrow ۳x^۲ + x + ۱ = ۰ \rightarrow \Delta < ۰ \Rightarrow$$ ریشهٔ حقیقی ندارد

$$\Rightarrow t = -۱ \Rightarrow ۳x^۲ + x - ۲ = -۱ \Rightarrow ۳x^۲ + x - ۱ = ۰ \rightarrow \Delta > ۰ \Rightarrow S = \frac{-b}{a} = \frac{-۱}{۳}$$

پس مجموع ریشه‌های معادلهٔ $(gof)(x) = ۰$ برابر $\frac{-۱}{۳}$ است.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱۸ برای ترکیب $f(f(x))$ باید جواب f در دامنهٔ f قرار گیرد یعنی:

$$-۳ < ۱-۲x \leq ۱$$
$$\xrightarrow{-۱} -۴ < -۲x \leq ۰ \xrightarrow{\div(-۲)} ۲ > x \geq ۰$$
$$۰ \leq x \leq ۱$$

و از اشتراک آن با شرط دامنهٔ f داریم:

چون ترکیب ۲ تابع خطی، خطی است پس با قرار دادن در $f(f(x))$، مقادیر آن به‌دست می‌آید

$$f(f(۰)) = f(۱) = -۱ \quad f(f(۱)) = f(-۱) = ۳$$

پس برد fof می‌شود $[-۱,۳]$ که شامل ۵ عدد صحیح است $\{-۱,۰,۱,۲,۳\}$

راه حل دوم:

$fof(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$D_{fof} = [۰,۱], fof(x) = ۱-۲f(x) = ۱-۲(۱-۲x) = ۴x-۱$$
$$\Rightarrow -۱ \leq ۴x-۱ \leq ۳ \Rightarrow R_{fof} = [-۱,۳]$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱۹

$$[۳x+۵]^۲ = ۴۸ + [۳x-۳]^۲ \rightarrow [۳x+۵]^۲ - [۳x-۳]^۲ = ۴۸$$

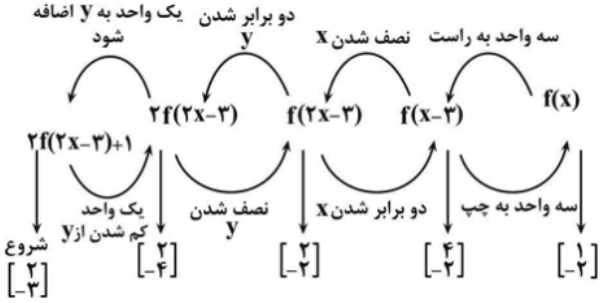
با در نظر گرفتن اتحاد مزدوج داریم:

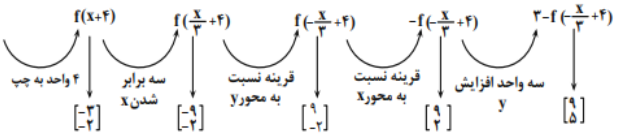
$$([۳x+۵]-[۳x-۳])([۳x+۵]+[۳x-۳]) = ۴۸$$
$$\rightarrow ([۳x]+۵-[۳x]+۳)([۳x]+۵+[۳x]-۳) = ۴۸$$
$$\rightarrow ۸([۳x]+۲) = ۴۸ \rightarrow ۲[۳x]+۲ = ۶ \rightarrow [۳x] = ۲$$
$$\Rightarrow ۲ \leq ۳x < ۳$$
$$\Rightarrow \frac{۲}{۳} \leq x < ۱ \Rightarrow x \in [\frac{۲}{۳}, ۱)$$

بنابراین $a = \frac{۲}{۳}$ و $b = ۱$ و $a+b = \frac{۵}{۳}$ است.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۲۰ روش اول:





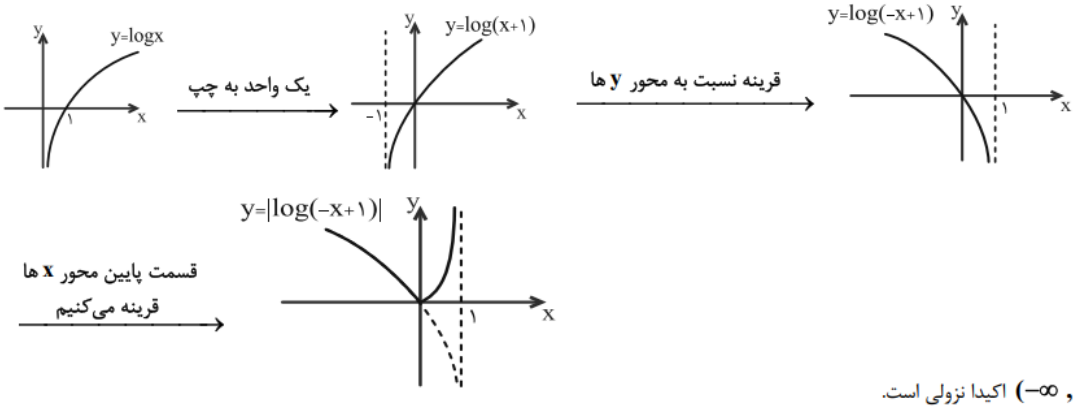
روش دوم:

$$\begin{bmatrix} ۲ \\ -۳ \end{bmatrix} \in y = ۲f(۲x-۳)+۱$$
$$\Rightarrow -۳ = ۲f(۱)+۱ \Rightarrow f(۱) = -۲$$
$$\Rightarrow (۱,-۲) \in f(x)$$

$$y = ۳ - f(۴ - \frac{x}{۳}) \Rightarrow \begin{cases} ۴ - \frac{x}{۳} = ۱ \Rightarrow \frac{x}{۳} = ۳ \Rightarrow x = ۹ \\ x = ۹ \Rightarrow y = ۳ - f(۱) = ۳ - (-۲) \\ \Rightarrow y = ۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۹ \\ ۵ \end{bmatrix} \in y = ۳ - f(۴ - \frac{x}{۳})$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۲۱ نمودار تابع $y=|\log(-x+1)|$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، تابع در بازه‌ی $(-\infty\ ,\ 0]$ اکیدا نزولی است.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۲۲ چون $D_f=[-2,2]$ باید $D_g=R$ بوده و $R_g\subseteq[-2,2]$ باشد پس مورد الف و مورد ب قابل قبول است.

الف) $g(x)=\dfrac{4x}{x^2+16}\quad D_g=R$

$x\neq 0:\ \dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{x^2+16}{4x}=\dfrac{x}{4}+\dfrac{4}{x}\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

$g(x)\in[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}]-\{0\}$

$x=0:\ g(0)=0$

ب) $g(x)=1+\cos x\quad R_g=[0,2]$

$D_g=R$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۲۳

$$f(x)=\frac{x-5}{x-3}\Rightarrow fof(x)=\frac{\frac{x-5}{x-3}-5}{\frac{x-5}{x-3}-3}=\frac{x-5-5(x-3)}{x-5-3(x-3)}=\frac{-4x+10}{-2x+4}=\frac{2x-5}{x-2}$$

$$\Rightarrow fofof(x)\frac{2\frac{x-5}{x-3}-5}{\frac{x-5}{x-3}-2}=\frac{2x-10-5(x-3)}{x-5-2(x-3)}=\frac{-3x+5}{-x+1}=\frac{3x-5}{x-1}\quad\Rightarrow fofofof(x)=\frac{3\frac{x-5}{x-3}-5}{\frac{x-5}{x-3}-1}=\frac{3x-15-5(x-3)}{x-5-(x-3)}=\frac{-2x}{-2}=x$$

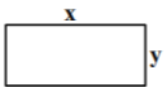
بنابراین معادلهٔ $fofofof(x)=x$ بی‌شمار جواب دارد.

لازم به ذکر است که از این مرحله به بعد توابع تکرار می‌شوند، یعنی

$$\Rightarrow fofofofof(x)=f(x)=\frac{x-5}{x-3},fofofofofof(x)=fof(x)=\frac{2x-5}{x-2},\ldots$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۲۴



$$\text{محیط} = ۲(x+y) = ۳۳ \rightarrow x+y = \frac{۳۳}{۲}$$

$$\text{مساحت} = ۶۵ \Rightarrow xy = ۶۵$$

حال معادلهٔ درجهٔ دوّم را تشکیل می‌هیم:

$$x^۲ - Sx + P = ۰ \xrightarrow[P=۶۵]{S=\frac{۳۳}{۲}} x^۲ - \frac{۳۳}{۲}x + ۶۵ = ۰$$

$$۲x^۲ - ۳۳x + ۱۳۰ = ۰$$

$$\Delta = ۱۰۸۹ - ۱۰۴۰ = ۴۹$$

$$x = \frac{۳۳ \pm ۷}{۴} \begin{cases} \frac{۴۰}{۴} = ۱۰ \\ \frac{۲۶}{۴} = ۶/۵ \end{cases} \rightarrow ۱۰ - ۶/۵ = ۳/۵$$

راه حل دوم:

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{۱۰۸۹ - ۱۰۴۰}}{۲} = \frac{\sqrt{۴۹}}{۲} = \frac{۷}{۲} = ۳/۵$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۲۵ هرگاه روابط α و β مشابه نبودند باید به اصل معادله، جمع ریشه‌ها و یا ضرب ریشه‌ها دقت کنید:

$$x^۲ - ۵x + ۱ = ۰ \begin{cases} S = ۵ \\ P = ۱ \end{cases}$$

$$P = ۱ \Rightarrow \alpha\beta = ۱ \rightarrow \beta = \frac{۱}{\alpha} \Rightarrow \beta^۲ = \frac{۱}{\alpha^۲}$$

$$\Rightarrow \alpha^۲ + \frac{۲}{\frac{۱}{\alpha^۲}} + ۳\beta^۲ = ۳\alpha^۲ + ۳\beta^۲ = ۳(\alpha^۲ + \beta^۲) = ۳(S^۲ - ۲P) = ۳(۲۵ - ۲) = ۳ \times ۲۳ = ۶۹$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۲۶ با توجه به اینکه $۱ - ۱۳ + ۹ = ۰$ است پس ریشه‌ها $\alpha = ۱$ و $\beta = \frac{۹}{۴}$ است.و در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} ۱ + \frac{۳}{\sqrt{\alpha}} = ۱ + \frac{۳}{۱} = ۴ \\ ۱ + \frac{۳}{\sqrt{\beta}} = ۱ + \frac{۳}{\sqrt{\frac{۹}{۴}}} = ۱ + \frac{۳}{\frac{۳}{۲}} = ۳ \end{cases}$$

پس ریشه‌های معادله $x^۲ - ax + ۱۲ = ۰$ برابر ۳ و ۴ است که جمع آن‌ها $a = ۳ + ۴ = ۷$ است.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۲۷ ابتدا معادلهٔ سهمی را با داشتن سه نقطه $A = (۰,۶)$ و $B = (۲,۶)$ و $C = (-۲,۲)$ می‌نویسیم. می‌توان معادله سهمی را $y = ax^۲ + bx + c$ در نظر گرفت و به کمک ۳ معادله ۳ مجهول را نوشت. منظور سؤال یافتن تفاضل ریشه‌هاست یعنی:

$$|x_۲ - x_۱| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

برای نوشتن معادلهٔ سهمی به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$y = ۶ + a(x-۰)(x-۲) \xrightarrow[\text{روی سهمی}]{(-۲,۲)} ۲ = ۶ + a(-۲)(-۲-۲) \rightarrow ۲ = ۶ + ۸a \rightarrow a = \frac{-۱}{۲}$$

$$y = \frac{-۱}{۲}x(x-۲) + ۶ = \frac{-x^۲}{۲} + x + ۶ \quad \text{تفاضل ریشه‌ها} = |x_۲ - x_۱| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{۱۳}}{|\frac{-۱}{۲}|} = ۲\sqrt{۱۳}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۲۸

$$\alpha\beta=۲\rightarrow\beta=\frac{۲}{\alpha}\rightarrow\beta^{۵}=\frac{۳۲}{\alpha^{۵}}$$

$$\alpha^{۵}+\frac{۳۲}{\alpha^{۵}}=\alpha^{۵}+\beta^{۵}\ \text{(۱)}$$

$$\Rightarrow\alpha^{۲}+\beta^{۲}=S^{۲}-۲P=۱۶-۴=۱۲$$

$$\alpha^{۳}+\beta^{۳}=S^{۳}-۳PS=۶۴-۲۴=۴۰$$

$$(\alpha^{۲}+\beta^{۲})(\alpha^{۳}+\beta^{۳})=\alpha^{۵}+\beta^{۵}+\alpha^{۲}\beta^{۳}+\alpha^{۳}\beta^{۲}$$

$$=\alpha^{۵}+\beta^{۵}+\alpha^{۲}\beta^{۲}(\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow(۱۲)(۴۰)=\alpha^{۵}+\beta^{۵}+۴(۴)\Rightarrow$$

$$\alpha^{۵}+\beta^{۵}=۴۸۰-۱۶=۴۶۴\ \text{(۲)}$$

$$\xrightarrow{\text{(۲)}-\text{(۱)}}\alpha^{۵}+\frac{۳۲}{\alpha^{۵}}=۴۶۴$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۲۹

با تغییر متغیر $t=x-۴$ داریم:

$$(t+۱)^{۴}+(t-۱)^{۴}=۲۰\Rightarrow۲t^{۴}+۱۲t^{۲}+۲=۲۰$$
$$\Rightarrow t^{۴}+۶t^{۲}-۹=۰\Rightarrow t^{۴}+۶t^{۲}+۹=۱۸$$
$$\Rightarrow(t^{۲}+۳)^{۲}=۱۸\Rightarrow t^{۲}+۳-۳\sqrt{۲}=۰$$

معادلهٔ بالا دو ریشه دارد، با جایگذاری $t=x-۴$ داریم:

$$(x-۴)^{۲}+۳-۳\sqrt{۲}=۰\Rightarrow x^{۲}-۸x+۱۶+۳-۳\sqrt{۲}=۰$$
$$x^{۲}-۸x+(۱۹-۳\sqrt{۲})=۰$$

حاصل‌ضرب دو ریشه در معادلهٔ بالا برابر است با $۱۹-۳\sqrt{۲}$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۳۰

$$D_g=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x^{۳}+۴)>f(۴x^{۲}+x)\}$$

تابع f اکیداً نزولی است، پس باید نامعادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$x^{۳}+۴<۴x^{۲}+x$$
$$\Rightarrow\underbrace{x^{۳}-۴x^{۲}}_{x^{۲}(x-۴)}-\underbrace{x+۴}_{-(x-۴)}<۰\Rightarrow(x-۴)(x^{۲}-۱)<۰$$

x		-۱		۱		۴	
$(x-۴)(x^{۲}-۱)$	$-$		$+$		$-$		$+$

$$\Rightarrow D_g=(-\infty,-۱)\cup(۱,۴)$$

اعداد صحیح نامنفی این مجموعه ۲ و ۳ هستند.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۳۱

تابع f با دامنه و برد $[۰,+\infty)$ اکیداً صعودی است، پس تابع $f^{-۱}$ نیز با همین دامنه‌و برد اکیداً صعودی است.

حال تابع $y=f^{-۱}(۱-x)$ با دامنه $(-\infty,۱]$ اکیداً نزولی است، پس تابع g با دامنه $[۰,۱]$ اکیداً صعودی است، پس برد تابع g بازهٔ $[g(۰),g(۱)]$ است.

کافی است $f^{-۱}(۱)$ را حساب کنیم:

$$g(۰)=f(۰)-f^{-۱}(۱)=۰-f^{-۱}(۱)$$

$$f^{-۱}(۱)=k\Rightarrow f(k)=\frac{k+\sqrt{k}}{۲}=۱\Rightarrow k=۱$$

پس کم‌ترین مقدار تابع g برابر ۱- است.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۳۲ تابع f با دامنهٔ $[۱ , +\infty)$ اکیداً نزولی است، پس داریم:

$$f(f(x)) > f(x+۲) \xrightarrow{f \text{ اکیداً نزولی}} f(x) < x+۲$$

با در نظر گرفتن شرط دامنه باید نامعادله‌های زیر را حل کنیم:

$$x+۲ > ۲-\sqrt{x-۱} \geq ۱ \Rightarrow \begin{cases} x+۲ > ۲-\sqrt{x-۱} \Rightarrow x > -\sqrt{x-۱} \Rightarrow x \geq ۱ \\ ۲-\sqrt{x-۱} \geq ۱ \Rightarrow \sqrt{x-۱} \leq ۱ \Rightarrow ۱ \leq x \leq ۲ \end{cases}$$

اشتراک مجموعه‌های بالا بازهٔ $[۱ , ۲]$ است.

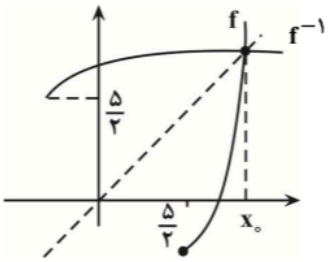
(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۳۳ تابع $f(x)$ و $g(x)$ را به صورت زیر تصور می‌کنیم:

$$g(x) = \sqrt{x+\frac{۲۱}{۴}} + \frac{۵}{۲}, x \geq -\frac{۲۱}{۴} \quad f(x) = x^۲ - ۵x + ۱ = (x-\frac{۵}{۲})^۲ - \frac{۲۵}{۴} + ۱ = (x-\frac{۵}{۲})^۲ - \frac{۲۱}{۴}$$

$$f^{-۱}(x) = \sqrt{x+\frac{۲۱}{۴}} + \frac{۵}{۲}$$

پس تابع f به ازای $x \geq \frac{۵}{۲}$ معکوس تابع g است. از طرفی تابع f روی این بازه صعودی است، لذا نمودار g را روی نیمساز ربع اول و سوم قطع می‌کند. با توجه به شکل نمودار دو تابع:



در $x = x_۰$ این رابطه داده شده برقرار است لذا:

$$x^۲ - ۵x + ۱ = x \Rightarrow x^۲ - ۶x + ۱ = ۰$$

$$\begin{cases} x = \frac{۶+\sqrt{۳۲}}{۲} = ۳+\sqrt{۸} \\ x = \frac{۶-\sqrt{۳۲}}{۲} = ۳-\sqrt{۸} \end{cases} \xrightarrow{x > \frac{۵}{۲}} \min(k) = ۳+\sqrt{۸}$$

* از روی شکل متوجه شدیم که $x_۰ > ۲/۵$ است.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۳۴ دامنهٔ تابع f را می‌یابیم:

$$۳۶ - ۹x^۲ \geq ۰ \xrightarrow{\div ۹} ۴ - x^۲ \geq ۰ \rightarrow x \in [-۲,۲]$$

و همچنین مخرج نباید صفر شود: $D_f = [-۲,۲] - \{۰\}$

مجموع اعضای برد: $\sqrt{۲۷}$

اختلاف اعضای دامنه: ۳

$$g^{-۱} \Rightarrow \{(۷,۱)(۴,۲)(۸,۳)(۱,۵)(۱۱,۰)\} \Rightarrow fog^{-۱} \Rightarrow \{(۷,\sqrt{۲۷})(۴,۰)\}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۲۷}}{۳} = \sqrt{۳}$$

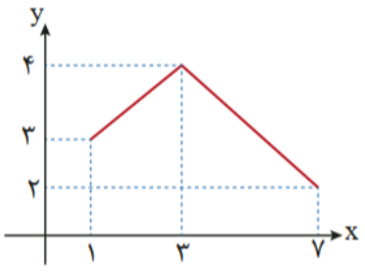
(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۳۵

$$-۱ \leq \cos x \leq ۱ \Rightarrow ۰ \leq |\cos x| \leq ۱ \Rightarrow -۱ \leq |\cos x| - ۱ \leq ۰ \rightarrow -۱ \leq t \leq ۰ \quad |\cos x| - ۱ = t \rightarrow \text{برد تابع} \begin{cases} ۳^t \rightarrow y_{min} = ۳^{-۱} = \frac{۱}{۳} \\ y_{max} = ۳^۰ = ۱ \end{cases} \Rightarrow b - a = \frac{۲}{۳}$$

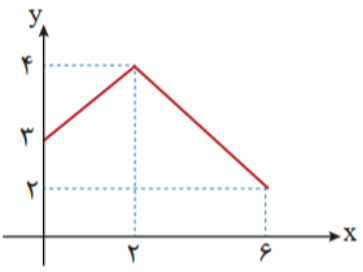
(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۳۶



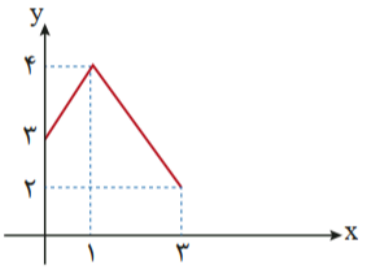
$y=f(x)$

نمودار باید ۱ واحد به سمت چپ منتقل شود



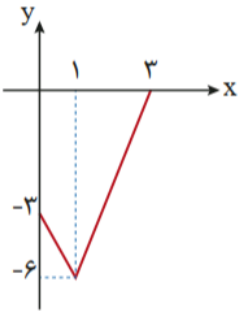
$y=f(x+1)$

با توجه به $y=6-af(2x+b)$ تابع $f(x)$، $\frac{1}{2}$ منقبض می‌شود.

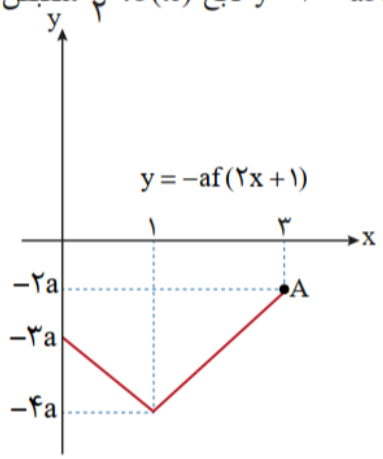


$y=f(2x+1)$

با توجه به ضریب $(-a)$



$y=6-3f(2x+1)$



طبق ضابطه تابع انتقال یافته باید ۶+ واحد به سمت بالا منتقل شویم!

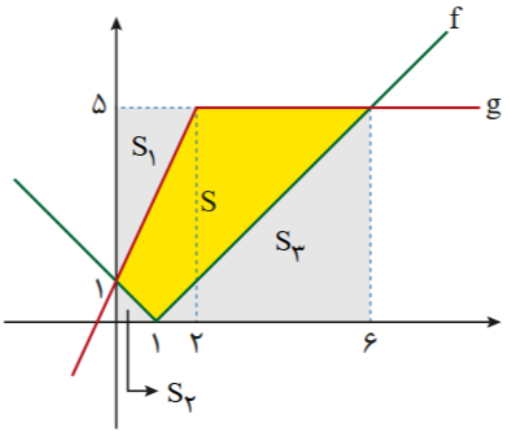
می‌دانیم عرض نقطهٔ A، ۰ است پس $-2a+6=0 \Leftarrow a=+3$

$$S=\frac{1}{2}\times 1\times(3+6)+\frac{2\times 6}{2}=10/5$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۳۷

$$f(x)=\begin{cases}5 & x\geq 2\\ 2x+1 & x<2\end{cases}$$



$$S_3=\frac{5\times 5}{2}=\frac{25}{2} \qquad S_2=\frac{1\times 1}{2}=\frac{1}{2} \qquad S_1=\frac{4\times 2}{2}=4$$

$$S+(S_1+S_2+S_3)=6\times 5 \qquad S_1+S_2+S_3=17$$
$$\rightarrow S=13$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

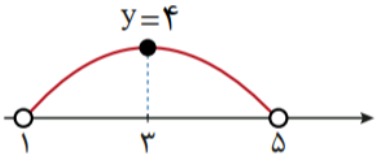
۳۳۸

$$\frac{x-1}{5-x}>0\rightarrow 1<x<5\rightarrow f(x)=-(x-1)\sqrt{\frac{5-x}{x-1}}=-\sqrt{(x-1)(5-x)}$$

$$\text{سهمی}=-x^2+6x-5\xrightarrow{\text{yنقطه‌راس}}\frac{-\Delta}{4a}=4$$

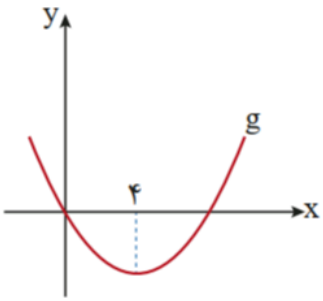
$$(x-1)(5-x)\leq 4\rightarrow 0<\sqrt{(x-1)(5-x)}\leq 2$$

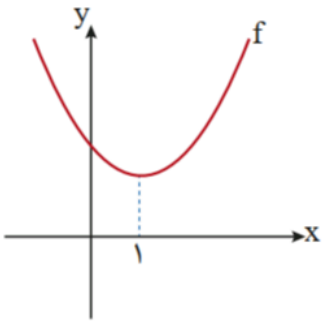
$$\rightarrow R_f=[-2,0)\rightarrow a=-1,b=2$$



(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۳۹





$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 4 \leq 4 \end{cases} \quad \underset{\text{صعودی نزولی}}{gof} \rightarrow \text{نزولی} \xrightarrow{\cap} [1,2]$$

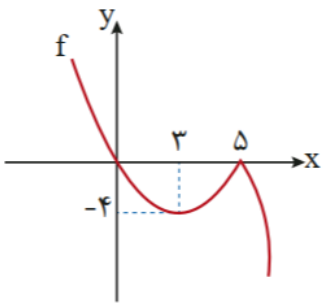
$$\begin{cases} x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 4 \geq 4 \end{cases} \quad \underset{\text{نزولی صعودی}}{gof} \rightarrow \text{نزولی} \xrightarrow{\cap} [-\infty,0]$$

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 4 \leq 4 \end{cases} \quad \underset{\text{نزولی نزولی}}{gof} \rightarrow \text{صعودی} \xrightarrow{\cap} [0,1]$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 4 \geq 4 \end{cases} \quad \underset{\text{صعودی صعودی}}{gof} \rightarrow \text{صعودی} \xrightarrow{\cap} [2,+\infty)$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۴۰



$$f(x) = \begin{cases} (1-x)(x-5) & x \geq 5 \\ -(1-x)(x-5) & x < 5 \end{cases}$$

بخش اکیداً صعودی $\begin{cases} 3 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 0 \end{cases}$ $y = (x-1)(x-5) = x^2 - 6x + 5$

$$\rightarrow (x-3)^2 = y+4 \rightarrow |x-3| = \sqrt{y+4} \rightarrow x = 3 + \sqrt{y+4}$$

$$f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x+4} \qquad -4 \leq x \leq 0$$

$$\begin{cases} a+b+c = 8 \\ n-m = 4 \end{cases}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۴۱

$2a + 3 = a^2$ و $6 - a \neq a \rightarrow a = -1$

$$g = \{(0,b),(2,4),(b,5),(2,b+1)\} \rightarrow b+1 = 4 \rightarrow b = 3$$

$$f = \{(1,1),(2,-1),(3,7)\}$$

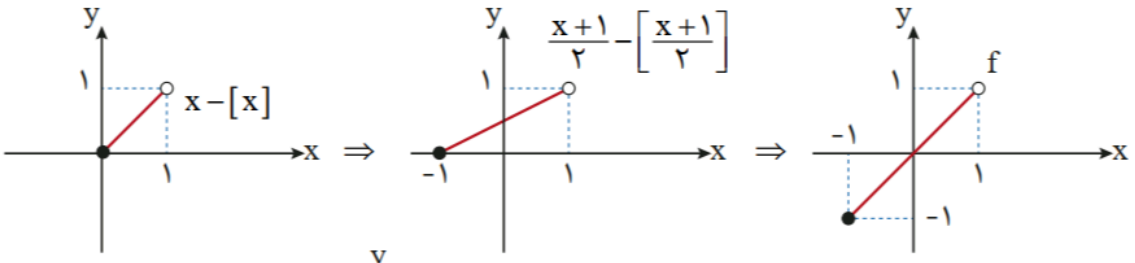
$$g = \{(0,3),(2,4),(3,5)\}$$

$$\rightarrow fog^{-1} = \{(4,-1),(5,7)\} \quad R_{fog^{-1}} = \{-1,7\}$$

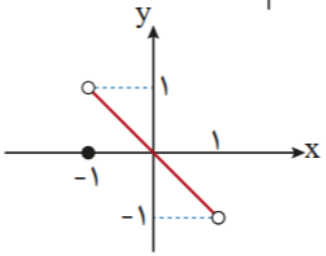
(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۴۲

$$f(x) = x + 1 - 2\left[\frac{x+1}{2}\right] - 1 = 2\left(\frac{x+1}{2} - \left[\frac{x+1}{2}\right]\right) - 1$$



$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \in Z \\ -1 & x \notin Z \end{cases} \Rightarrow f \times g$$



$$\Rightarrow R_{f \times g} = (-1,1)$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۴۳

$$f(x)=۰ \to (\sqrt{x}-۱)(۲\sqrt{x}-۱)=۰ \to x=۱,\frac{۱}{۴}$$

$$f(g(x))=۰ \to g(x)=۱,\frac{۱}{۴} \to \begin{cases} g(۲)=۱ \\ g(۶)=\frac{۱}{۴} \end{cases} \to m=\frac{-\frac{۳}{۴}}{۴}=-\frac{۳}{۱۶} \qquad g(x)=-\frac{۳}{۱۶}x+\frac{۱۱}{۸}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۴۴

$$y=\sqrt{-۲x+۱} \to y=\sqrt{-۲(x-۲)+۱}=\sqrt{-۲x+۵} \xrightarrow{\text{وارون}}$$

$$x=\frac{y^۲-۵}{-۲} \quad , \quad y\geq ۰ \to f^{-۱}(x)=\frac{x^۲-۵}{-۲} \quad , \quad x\geq ۰ \to y=\frac{۵-x^۲}{۲}-۳ \quad , \quad y=\frac{-x^۲-۱}{۲}$$

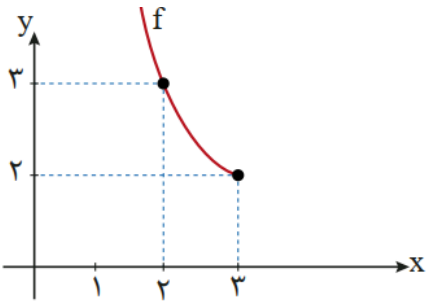
$$\frac{-x^۲-۱}{۲}=۳x-۱۴ \to x^۲+۶x-۲۷=۰ \to (x-۳)(x+۹)=۰ \quad (x\geq ۰) \to \boxed{x=۳}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۴۵

$f(x)=(x-۳)^۲+۲$

$f(۲)=۳$



۲ تا از نقاط تقاطع: $x=۲,۳$

نقطه دیگر روی $y=x$ است.

$$x^۲-۶x+۱۱=x \to x^۲-۷x+۱۱=۰ \to x=\frac{۷\pm\sqrt{۵}}{۲} \xrightarrow{۲\leq x\leq ۳} x=\frac{۷-\sqrt{۵}}{۲}$$

مجموع نقاط برخورد: $۲+۳+\frac{۷-\sqrt{۵}}{۲}=\frac{۱۷-\sqrt{۵}}{۲}$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۴۶

می‌دانیم دامنهٔ تابع $\frac{f}{g}$ برابر است با $D_f \cap D_g - \{x \mid g(x)=۰\}$. پس تابع $g(x)$ در نقاط $\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ باید برابر با صفر شود. داریم:

$$g(\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳})=۰ \Rightarrow ۱-\frac{a}{۲}(\frac{۱}{۳}-۱)=۰ \quad \Rightarrow \frac{a}{۲}(-\frac{۲}{۳})=۱ \Rightarrow a=-۳$$

$$f^۲(-۳+۱)=f^۲(-۲)=(f(-۲))^۲=((-۲)^۳-۲)^۲=(-۸-۲)^۲=(-۱۰)^۲=۱۰۰$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۴۷

$$\begin{cases} f(x)=-۲x+۴ \\ g(x)=\frac{۱}{۲}x-۱ \end{cases} \qquad =-bx+۲b+a \qquad y=a+b(-۲x+۴+x-۲) \qquad y=x \Rightarrow \begin{cases} -b=۱ & \Rightarrow b=-۱ \\ ۲b+a=۰ & \Rightarrow a=۲ \end{cases}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۴۸

$$|x|\le x-[x]\begin{cases}x\ge 0 \Rightarrow x\le x-[x]\\ x<0 \Rightarrow -x\le x-[x]\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x\ge 0 \Rightarrow [x]\le 0 \Rightarrow 0\le x<1\\ x<0 \Rightarrow [x]\le 2x \Rightarrow \frac{-1}{2}\le x\end{cases}$$ (حل نامعادله به روش هندسی)

پس دامنهٔ f همان بازهٔ $\left[\frac{-1}{2},1\right)$ است.

$$\frac{-1}{2}\le x<1 \Rightarrow -\infty<\frac{2x+1}{x-1}\le 0$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۴۹

$$\begin{cases}a=3-4f(-1)\\ 3=2+3f(3b)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(-1)=\frac{3-a}{4}\\ f(3b)=\frac{1}{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-1=3b\\ \frac{3-a}{4}=\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-\frac{1}{3}\\ a=\frac{5}{3}\end{cases}\Rightarrow a-b=2$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۵۰

نکته: در تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$، اگر $a+d=0$، آن‌گاه $f=f^{-1}$

$$f(x)=\frac{2x+1}{x-2}\xrightarrow{a+d=0}f^{-1}(x)=f(x)$$

نکته: قرینهٔ نقطهٔ $A(x,y)$ نسبت به خط $x=k$ برابر است با: $A'(2k-x,y)$

$$y=\frac{2x+1}{x-2}\xrightarrow[y\to y]{x\to 2k-x}y=\frac{2(2k-x)+1}{2k-x-2}=\frac{-2x+4k+1}{-x+2k-2}\xrightarrow[y\to -y]{\text{قرینه‌نسبت‌به‌مبدا}}-y=\frac{2x+4k+1}{x+2k-2}\Rightarrow g(x)=\frac{-2x-4k-1}{x+2k-2}$$

$$\xrightarrow[\text{از مبدا عبور می‌کند}]{g(0)=0}-4k-1=0\to k=\frac{-1}{4}\Rightarrow g(x)=\frac{-2x}{x-\frac{5}{2}}\to g'(x)=\frac{5}{(x-\frac{5}{2})^2}$$

$$\to g'(0)=\frac{4}{5}\ \text{شیب خط مماس}\ \to m=\frac{-5}{4}\ \text{شیب خط عمود}$$

$$\text{معادله خط عمود}\begin{cases}\text{شیب: }\frac{-5}{4}\\ \text{نقطه}\left|{}^{0}_{0}\right.\end{cases}\Rightarrow 5x+4y=0$$

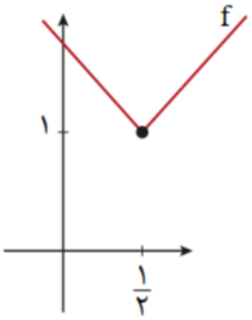
(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۵۱

$$g(x)=\sqrt[۳]{۸\underbrace{\left(\frac{x}{۸}-\left[\frac{x}{۸}\right]\right)}_{۰\le x<۱}}\to R_g=[۰,۲)$$

در تابع fog، ورودی تابع، برد g است:

پس باید برد f را به ازای $x\in[۰,۲)$ پیدا کرد:



$$f(x)=۱+\sqrt{(۲x-۱)^۲}=۱+|۲x-۱|$$
$$f(۰)=۲$$
$$f\left(\frac{۱}{۲}\right)=۱\to R_{fog}=[۱,۴)\to b-a=۳$$
$$f(۲)=۴$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۵۲

$$\begin{cases}x^۲+x+k=۰\\ x^۲-۵x-۲k=۰\end{cases}\xrightarrow{\text{کم}}۶x+۳k=۰\Rightarrow x=\frac{-k}{۲}$$

در معادله جایگزین می‌کنیم.

$$\frac{k^۲}{۴}-\frac{k}{۲}+k=۰\Rightarrow k^۲+۲k=۰\xrightarrow{k\neq۰}k=-۲$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x^۲+x-۲=۰\Rightarrow x=۱,-۲\\ x^۲-۵x+۴=۰\Rightarrow x=۱,۴\end{cases}$$

بنابراین اختلاف ریشه‌های غیرمشترک برابر $۶=(-۲)-۴$ است.

روش دوم:

$$\left.\begin{aligned}x^۲-۵-۲k=۰\xrightarrow[\text{ریشه‌ها}]{x_۱,x_۲}x_۱+x_۲=۵\\ x^۲+x+k=۰\xrightarrow[\text{ریشه‌ها}]{x_۱,x_۳}x_۱+x_۳=-۱\end{aligned}\right\}\xrightarrow[\text{غیرمشترک}]{\text{اختلاف ریشه‌های}}x_۲-x_۳=۶$$

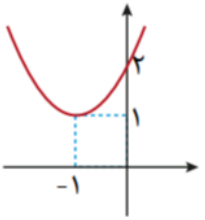
(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۵۳

$$(۱-a)x^۲+۲\sqrt{۶}x>a\Rightarrow(۱-a)x^۲+۲\sqrt{۶}x-a>۰$$
$$\begin{cases}۱-a>۰\\ \Delta<۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a<۱\\ ۲۴+۴a(۱-a)<۰\end{cases}$$
$$\Delta<۰\Rightarrow a^۲-a-۶>۰\Rightarrow a<-۲\text{ یا }a>۳\qquad\xrightarrow{a<۱}a<-۲$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۵۴



۱) $۲ax^۲+ax-۲=۰\Rightarrow$ ریشه‌ها α و β

$\alpha+\beta=-\frac{۱}{۲}$ و $\alpha\beta=-\frac{۱}{a}$

۲) $-x^۲+ax+b=۰\Rightarrow$ ریشه‌ها $۲\alpha+۱$ و $۲\beta+۱$

$S=۲\alpha+۱+۲\beta+۱=a\Rightarrow ۲(-\frac{۱}{۲})+۲=a\Rightarrow a=۱$

$P=(۲\alpha+۱)(۲\beta+۱)=-b$

$\Rightarrow ۴\alpha\beta+۲(\alpha+\beta)+۱=-b$

$\Rightarrow -۴-۱+۱=-b\Rightarrow b=۴$

$\Rightarrow f+g=x^۲+۲x+۲\rightarrow$ از ناحیه ۳ و ۴ عبور نمی‌کند

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۵۵

$\sqrt{۴x-x^۲}=۰\rightarrow x=۰,۴$

$\sqrt{۴x-x^۲}=-۱$ جواب ندارد

$\sqrt{۴x-x^۲}=۱\rightarrow x=۲\pm\sqrt{۳}$

$\sqrt{۴x-x^۲}=۲\rightarrow x=۲$

$fog=\{(۰,-۱),(۴,-۱),(۲+\sqrt{۳},۲),(۲-\sqrt{۳},۲),(۲,۳)\}$

برای این که fog وارون‌پذیر باشد باید یک به یک باشد. با حذف دو زوج مرتب یک به یک می‌شود. یک زوج از بین $(۰,-۱)$ و $(۴,-۱)$ و زوج دیگر از بین $(۲+\sqrt{۳},۲)$ و $(۲-\sqrt{۳},۲)$ باید حذف شود.

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۵۶

$y=۰\Rightarrow -x^۲+۴x+۲=۰\Rightarrow x_A=۲-\sqrt{۶}$

$\Rightarrow x^۲-۴x-۲۰=۰\Rightarrow x_c=۲+۲\sqrt{۶}$

$y=-۱۸\Rightarrow -x^۲+۴x+۲=-۱۸$

$S=OB\times\frac{OA+BC}{۲}=۱۸\times\frac{\sqrt{۶}-۲+۲+۲\sqrt{۶}}{۲}=۲۷\sqrt{۶}$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۵۷ این تساوی وقتی برقرار است که $g(x)=۰\rightarrow\left(fof^{-۱}\right)(x)=x\rightarrow x\in D_{f^{-۱}}=R_f$ پس باید برد تابع f را تعیین کنیم.

$$y=x+\sqrt{۴-x^۲}\rightarrow y-x=\sqrt{۴-x^۲}\xrightarrow{y\geq x}y^۲+x^۲-۲xy=۴-x^۲\Rightarrow$$

$$۲x^۲-۲xy+y^۲-۴=۰\rightarrow x=\frac{۲y\pm\sqrt{۴y^۲-۸y^۲+۳۲}}{۴}\Rightarrow ۳۲-۴y^۲\geq ۰\Rightarrow$$

$$y^۲\leq ۸\rightarrow -۲\sqrt{۲}\leq y\leq ۲\sqrt{۲}\xrightarrow{y\geq x}R_f=\left[-۲,۲\sqrt{۲}\right]$$
$$-۲\leq x\leq ۲$$

روش دوم:

$$y=x+\sqrt{۴-x^۲},-۲\leq x\leq ۲\rightarrow y'=۱-\frac{x}{\sqrt{۴-x^۲}}=۰\Rightarrow\sqrt{۴-x^۲}=x\xrightarrow{x\geq ۰}$$

$$۴-x^۲=x^۲\Rightarrow x=\sqrt{۲}$$

$$f\left(\sqrt{۲}\right)=۲\sqrt{۲},f(-۲)=-۲,f(۲)=۲\Rightarrow R_f=\left[-۲,۲\sqrt{۲}\right]$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۵۸ در ابتدا ضابطه f را کمی مرتب می‌کنیم: $f(x)=mx^۲+۲mx-۶x-۱=m\underbrace{\left(x^۲+۲x\right)-۶x-۱}$

می‌دانیم تساوی $m\times ۰=۰$ برای هر مقدار m برقرار است پس:

$$x^۲+۲x=۰\rightarrow x=۰,x=-۲\rightarrow A\left|{}^{۰}_{-۱},B\right|{}^{-۲}_{۱۱}$$

معادلهٔ خط گذرا از این دو نقطه $y=-۶x-۱$ است که در انتهای ضابطهٔ f نیز قرار دارد

$$\begin{cases}y=-۶x-۱\\y=x\end{cases}\rightarrow -۶x-۱=x\Rightarrow x=-\frac{۱}{۷},y=-\frac{۱}{۷}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۵۹ در ابتدا یک واحد به راست می‌بریم:

۱) $y=۲(x-۱)+۱=۲x-۱\qquad ۰\leq x\leq ۴$

حالا نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم:

۲) $y=-۲x-۱\qquad -۴\leq x\leq ۰$

۳) $g(x)=-۲x+۱\qquad -۴\leq x\leq ۰\rightarrow\begin{cases}g(-۴)=۹\\g(۰)=۱\end{cases}\rightarrow R_g=[۱,۹]$

$D_f\cap D_g=[۱,۳]$

$f(x)=۲x+۱\qquad ۱\leq x\leq ۳\rightarrow$ برد $=[f(۱),f(۳)]=[۳,۷]$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۶۰ ابتدا باید برد $y=\frac{x^۲-۱}{۲x}$ را تعیین کرد:

$y=\underbrace{\frac{x}{۲}}_{\text{اکیداً صعودی}}-\underbrace{\frac{۱}{۲x}}_{\text{اکیداً صعودی}}\rightarrow$ تابع y اکیداً صعودی است.

$$\lim_{x\to ۰^+} y=-\infty,\ \lim_{x\to ۱^-} y=۰\rightarrow R_y=(-\infty,۰)$$

ضابطهٔ دوم نباید با ضابطهٔ اول برد مشترک داشته باشد:

$$x=۱\rightarrow |۲+m|-۴\geq ۰\Rightarrow |۲+m|\geq ۴\rightarrow \begin{cases} m\geq ۲ \\ m\leq -۶ \end{cases} \quad (۱)$$

ضابطهٔ دوم باید به تنهایی یک به یک باشد:

$$-\frac{m}{۲}\leq ۱\rightarrow m\geq -۲ \quad (۲) \quad \text{(ریشه داخل قدر)}$$

$$(۱)\cap(۲)\rightarrow m\geq ۲\ ,\ \min(m)=۲$$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^۲-۱}{۲x} & ۰<x<۱\ ,\ y<۰ \\ |۲x+۲|-۴ & x\geq ۱\quad y\geq ۰ \end{cases}$$

برای پیدا کردن $f^{-۱}(۲)$ کافی است $f(x)=۲$ را حل کنیم:

$$f^{-۱}(۲)=?\rightarrow |۲x+۲|-۴=۲\rightarrow |۲x+۲|=۶\xrightarrow{x\geq ۱} x=۲$$

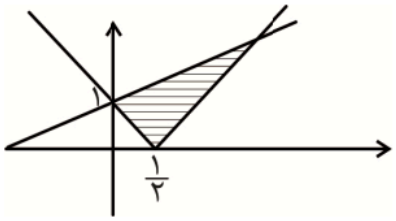
$$f^{-۱}\left(\frac{-۱}{۲}\right)=?\rightarrow \frac{x^۲-۱}{۲x}=\frac{-۱}{۲}\rightarrow x^۲+x-۱=۰\xrightarrow{۰<x<۱} x=\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}$$

$$f^{-۱}(۲).f^{-۱}\left(\frac{-۱}{۲}\right)=۲\left(\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)=-۱+\sqrt{۵}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۶۱ **گزینه ۲ درست است.**

نمودارهای دو تابع را رسم می‌کنیم.



ناحیهٔ بین دو نمودار به‌شکل مثلثی با دو رأس $(\frac{۱}{۲},۰)$ و $(۰,۱)$ است. برای یافتن مختصات رأس سوم باید ضابطهٔ دو تابع را مساوی بگذاریم:

$$|۲x-۱|=x+۱\xrightarrow{x>\frac{۱}{۲}} ۲x-۱=x+۱\rightarrow x=۲\rightarrow y=۳$$

مساحت مثلثی به رأس‌های $(\frac{۱}{۲},۰)$، $(۰,۱)$، $(۲,۳)$ را به روش زیر می‌یابیم:

$$S=\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} ۰ & ۱ \\ ۲ & ۳ \\ \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix}=\frac{۱}{۲}\left((۰\times ۳+۲\times ۰+\frac{۱}{۲}\times ۱)-(۲\times ۱+\frac{۱}{۲}\times ۳+۰\times ۰)\right)=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۷}{۲}\right)=-\frac{۳}{۲}$$

با توجه به مثبت بودن مقدار مساحت $S=\frac{۳}{۲}$ درست است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۶۲ گزینه ۴ درست است.

دامنه تابع f برابر است با:

$$۲x^۲ - ۴ \geq ۰ \rightarrow x^۲ \geq ۲ \rightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt{۲} \\ x \leq -\sqrt{۲} \end{cases}$$

دامنهٔ تابع g را به کمک جدول تعیین علامت می‌یابیم:

$$(x-a)(۲x^۲ - ۴) \geq ۰$$

	$-\sqrt{۲}$		a		$\sqrt{۲}$	
+	۰	−	۰	−	۰	+

اگر $a \in (-\sqrt{۲}, \sqrt{۲})$ باشد، دامنهٔ تابع g به‌صورت $\{x \geq ۲\} \cup \{x \leq -۲\} \cup \{a\}$ در می‌آید و با توجه به مساوی نبودن دامنهٔ دو تابع، تساوی تابع‌ها امکان‌پذیر نیست.

$$a \in (-\sqrt{۲}, \sqrt{۲}) \Rightarrow n - m \text{ حداکثر} = (\sqrt{۲}) - (-\sqrt{۲}) = ۲\sqrt{۲}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۶۳ گزینه ۴ درست است.

با توجه به اینکه $f(x) > ۰$ و اینکه $f(x)$ اکیداً صعودی است، می‌توان نتیجه گرفت $\frac{۱}{f(x)}$ اکیداً نزولی است و $y = f(x) - \frac{۱}{f(x)}$ تابعی اکیداً صعودی است. از طرفی:

$$\begin{cases} ۰ < f(x) < ۱ \rightarrow \frac{۱}{f(x)} > ۱ \rightarrow f(x) - \frac{۱}{f(x)} < ۰ \\ ۱ < f(x) < ۵ \rightarrow ۱ > \frac{۱}{f(x)} > \frac{۱}{۵} \rightarrow f(x) - \frac{۱}{f(x)} > ۰ \end{cases}$$

روی دامنهٔ $(۰,۱)$ تابع $y = f(x) - \frac{۱}{f(x)}$ اکیداً صعودی و منفی است و توان دو آن تابعی اکیداً نزولی خواهد بود.

روی دامنهٔ $(۱,۱۰)$ تابع $y = f(x) - \frac{۱}{f(x)}$ اکیداً صعودی و مثبت است و $g(x) = \left(f(x) - \frac{۱}{f(x)}\right)^۲$ تابعی اکیداً صعودی خواهد بود.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۶۴ گزینه ۱ درست است.

به کمک دامنهٔ تابع $y=۲f(۲x)+۱$، دامنهٔ تابع $f(x)$ را که بازهٔ $[۶,۱۰]$ است را می‌یابیم.

برای یافتن دامنهٔ تابع $g(x)$ داریم:

$$\begin{cases}\frac{۱-x}{۳}=۶\rightarrow ۱-x=۱۸\rightarrow x=-۱۷\\ \frac{۱-x}{۳}=۱۰\rightarrow ۱-x=۳۰\rightarrow x=-۲۹\end{cases}$$

دامنهٔ تابع $g(x)$ بازهٔ $[-۲۹,-۱۷]$ است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

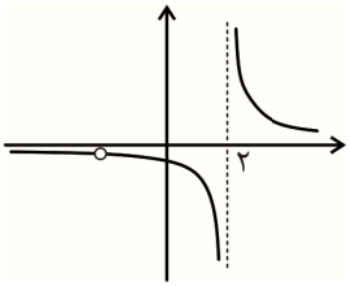
۳۶۵ گزینه ۲ درست است.

ضابطهٔ $g(x)$ را می‌یابیم:

$$f(x)-g(x)=\frac{۲}{x+۱}\rightarrow g(x)=f(x)-\frac{۲}{(x+۱)}=\frac{۳x-۳}{(x-۲)(x+۱)}-\frac{۲}{(x+۱)}$$

$$=\frac{۳x-۳}{(x-۲)(x+۱)}-\frac{۲(x-۲)}{(x-۲)(x+۱)}=\frac{۳x-۳-۲x+۴}{(x-۲)(x+۱)}=\frac{\cancel{x+۱}}{(x-۲)\cancel{(x+۱)}}=\frac{۱}{x-۲}$$

بزرگ‌ترین دامنهٔ تابع $g(x)$ مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{-۱,۲\}$ است. نمودار تابع را در این مجموعه رسم می‌کنیم.



(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۶۶ **گزینه ۱ درست است.**

ضابطهٔ $h(x)$ را می‌یابیم:

$$\left(\frac{f}{g}oh\right)(x)=\frac{(foh)(x)}{(goh)(x)}=۲g(x)+۱\rightarrow\frac{۲h(x)+۱}{h(x)-۳}=۲(x-۳)+۱\rightarrow\frac{۲h(x)+۱}{h(x)-۳}=۲x-۵$$

طرفین مساوی را در $h(x)-۳$ ضرب می‌کنیم:

$$۲h(x)+۱=(۲x-۵)(h(x)-۳)\rightarrow$$
$$۲h(x)+۱=۲xh(x)-۶x-۵h(x)+۱۵\rightarrow$$
$$۶x-۱۴=۲xh(x)-۷h(x)\rightarrow ۶x-۱۴=(۲x-۷)h(x)\rightarrow h(x)=\frac{۶x-۱۴}{۲x-۷}$$

مقدار تابع $h(x)$ به‌ازای $x=\frac{۷}{۲}$ تعریف نشده است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۶۷ **گزینه ۲ درست است.**

دامنهٔ تابع $g(x)$ را می‌یابیم:

$$D_{fof}=\{x\in D_f\mid f(x)\in D_f\}=\{-۱<x<۰\cap -۱<۳x+۱<۰\}$$
$$=\left\{-۱<x<۰\cap -\frac{۲}{۳}<x<-\frac{۱}{۳}\right\}=\left\{-\frac{۲}{۳}<x<-\frac{۱}{۳}\right\}$$

ضابطهٔ تابع $g(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$g(x)=fof(x)=۳(۳x+۱)+۱=۹x+۴$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۶۸ **گزینه ۳ درست است.**

ضابطهٔ تابع وارون $f(x)$ را می‌یابیم:

$$y=\sqrt{x+۲\sqrt{x-۱}}\Rightarrow y=\sqrt{(x-۱)+۲\sqrt{x-۱}+۱}$$

$\sqrt{x-۱}$ را t فرض می‌کنیم:

$$y=\sqrt{t^۲+۲t+۱}\rightarrow y=\sqrt{(t+۱)^۲}\rightarrow y=|t+۱|$$

با توجه به $t>۰$ می‌توانیم بنویسیم:

$$y=t+۱\rightarrow y=\sqrt{x-۱}+۱\rightarrow y-۱=\sqrt{x-۱}\rightarrow (y-۱)^۲=x-۱$$
$$\rightarrow x=y^۲-۲y+۲\rightarrow f^{-۱}(x)=x^۲-۲x+۲$$

بنابراین $a=۱$، $b=-۲$، $c=۲$ و $۲a+b+c=۲$ است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۶۹ گزینه ۳ درست است.

تابع $f(x)$ را y فرض می‌کنیم:

$$f(x)=۲g(x)\rightarrow y=۲g(x)\rightarrow g(x)=\frac{y}{۲}\rightarrow x=g^{-۱}(\frac{y}{۲})$$

از طرفی $f^{-۱}of(x)=x$ پس:

$$f^{-۱}(f(x))=g^{-۱}(\frac{y}{۲})$$

به‌جای $f(x)$ دوباره y قرار می‌دهیم:

$$f^{-۱}(y)=g^{-۱}(\frac{y}{۲})$$

با تغییر متغیر y به x داریم:

$$f^{-۱}(x)=g^{-۱}(\frac{x}{۲})\rightarrow ۸x^{۳}+۲x=a(\frac{x^{۳}}{۸})+b(\frac{x}{۲})\rightarrow a=۶۴\ ,\ b=۴\rightarrow a+۲b=۶۴+۸=۷۲$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۷۰ گزینه ۴ درست است.

نمودار تابع $y=\frac{f(x)}{[x]}$ را رسم می‌کنیم:

$$-۲\le x<-۱\rightarrow y=\frac{f(x)}{-۲}$$

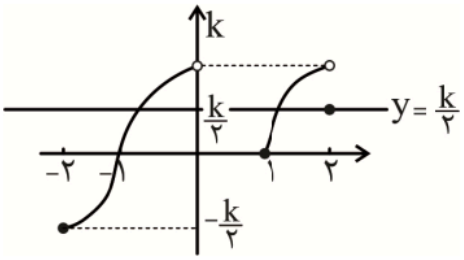
$$-۱\le x<۰\rightarrow y=\frac{f(x)}{-۱}$$

$$۰\le x<۱\rightarrow \text{جزو دامنه نیست}$$

$$۱\le x<۲\rightarrow y=\frac{f(x)}{۱}$$

$$x=۲\rightarrow y=\frac{f(۲)}{۲}$$

نمودارهای تابع مورد اشاره و خط $y=\frac{-f(۰)}{۲}=\frac{k}{۲}$ را رسم می‌کنیم.

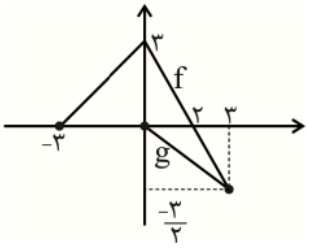


نمودارهای ۲ تابع در سه نقطه متقاطع‌اند.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۷۱ گزینه ۴ درست است.

ضابطهٔ تابع g و f را پس از محاسبهٔ مقدار تابع‌ها در $x=۴$ محاسبه می‌کنیم.



$$g(x)=-\frac{x}{۲} \quad (۰\le x\le ۳)$$

$$f(x)=\begin{cases} x+۳ & -۳\le x\le ۰ \\ -\frac{۳}{۲}x+۳ & ۰<x\le ۳ \end{cases}$$

ضابطهٔ $fog(x)$ را می‌یابیم:

$$fog(x)=\begin{cases} -\frac{x}{۲}+۳ & -۳\le -\frac{x}{۲}\le ۰ \ \rightarrow \ ۶\ge x\ge ۰ \\ \frac{۳}{۴}x+۳ & ۰<-\frac{x}{۲}\le ۳ \ \rightarrow \ ۰>x\ge -۶ \end{cases}$$

اشتراک دامنهٔ تابع اخیر با دامنهٔ تابع $g(x)$ بازهٔ $[۰,۳]$ است.

برد تابع $fog(x)$ روی بازهٔ $[۰,۳]$ برابر بازهٔ $\left[\frac{۳}{۲},۳\right]$ است و برای اینکه خط $y=k$ نمودار تابع $fog(x)$ را قطع کند باید $\frac{۳}{۲}\le k\le ۳$ باشد.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۷۲ گزینه ۲ درست است.

برای محاسبه دامنه $g(x)$؛ زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{f(3x-1)-f(2x)}{f(x)} \geq 0$$

برای آنکه این کسر بزرگ‌تر مساوی صفر باشد، دو حالت داریم:

(۱) صورت نامنفی و مخرج مثبت

$$\left.\begin{matrix} f(3x-1) \geq f(2x) \rightarrow 3x-1 \leq 2x \rightarrow x \leq 1 \\ f(x) > 0 \rightarrow x < 2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \boxed{x \leq 1}$$

(۲) صورت نامثبت و مخرج منفی

$$\left.\begin{matrix} f(3x-1) \leq f(2x) \rightarrow 3x-1 \geq 2x \rightarrow x \geq 1 \\ f(x) < 0 \rightarrow x > 2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \boxed{x > 2}$$

بنابراین دامنه به‌صورت $(-\infty,1] \cup (2,+\infty)$ است، پس تنها عدد صحیحی که در دامنه نیست $x = 2$ است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۷۳ گزینه ۴ درست است.

با توجه به اینکه n عدد صحیح است، حاصل fog و gof را به‌طور مجزا محاسبه می‌کنیم:

$$fog(x) = f(g(x)) = f(x-n[x]) = x-n[x]+n[x-n[x]] = x-n^2[x]$$

$$gof(x) = g(f(x)) = g(x+n[x]) = x+n[x]-n[x+n[x]] = x-n^2[x]$$

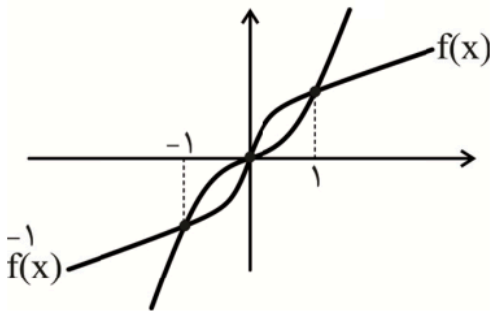
پس به‌ازای هر عدد صحیح n، fog و gof باهم برابرند و جواب گزینه (۴) است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۷۴ گزینه ۳ درست است.

نمودار تابع f و f^{-1} به‌صورت زیر است و هر دو، تابع اکیداً صعودی هستند.

$$\cancel{f}(f(x)) \geq \cancel{f}(f^{-1}(x)) \rightarrow f(x) \geq f^{-1}(x)$$



با توجه به نمودار در بازه $[-1,1]$ نمودار $f(x)$ بالاتر از $f^{-1}(x)$ قرار دارد که شامل سه عدد صحیح است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۷۵ **گزینه ۳ درست است.**

برای آنکه تابع یک به یک باشد باید شیب هر دو خط هم‌علامت باشد، یعنی:

$$m\times(۳-m)>۰\rightarrow ۰<m<۳$$

پس شیب هر دو مثبت است، پس اگر عدد $x=۱$ را در معادله بالایی قرار دهیم باید از حالتی که $x=۱$ را در پایینی قرار می‌دهیم بزرگ‌تر شود، یعنی: $۲-m\leq m+۱\leftarrow \frac{۱}{۲}\leq m$، پس با اشتراک گرفتن از هر دو شرط داریم: $\frac{۱}{۲}\leq m<۳$

حال چون m صحیح است، داریم: $m=۱,۲$. اگر در تابع m را ۱ یا ۲ قرار دهیم $f^{-۱}(m+۱)$ برابر ۱ می‌شود.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۷۶ **گزینه ۴ درست است.**

دو طرف معادله را برابر t قرار می‌دهیم:

$$۲f^{-۱}(x)=t\rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{t}{۲}\rightarrow x=f(\frac{t}{۲})$$

$$f^{-۱}(\frac{۸x+۳}{۴})=t\rightarrow f(t)=\frac{۸x+۳}{۴}\rightarrow x=\frac{۴f(t)-۳}{۸}$$

$$\frac{۴f(t)-۳}{۸}=f(\frac{t}{۲})\rightarrow ۴(t^{۳}+t)-۳=۸(\frac{t^{۳}}{۸}+\frac{t}{۲})$$

$$\rightarrow ۴t^{۳}+۴t-۳=t^{۳}+۴t\rightarrow ۳t^{۳}=۳\rightarrow t=۱\rightarrow x=f(\frac{۱}{۲})=\frac{۵}{۸}$$

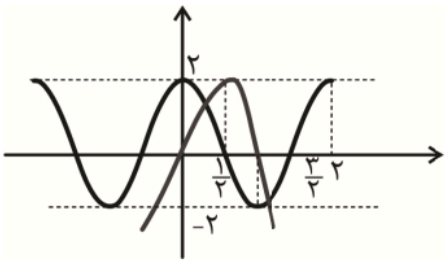
(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۷۷ **گزینه ۲ درست است.**

به‌دلیل اینکه xها در $\frac{-۵}{۲}$ ضرب شده است، (یعنی $۲x$ به $-۵x$ تبدیل شده است) پس قاعده در $\frac{۲}{۵}$ ضرب می‌شود و برابر $\frac{۸}{۵}$ است و yها در ۳ ضرب شده است (یعنی f به $۳f$ تبدیل شده است) و ارتفاع برابر ۱۵ می‌شود؛ پس مساحت برابر ۱۲ است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۷۸ گزینه ۳ درست است.



$$f_{(x)} = ۲\cos \pi x \rightarrow \begin{cases} y_{max} = ۲ \\ y_{min} = -۲ \\ T = \frac{۲\pi}{|\pi|} = ۲ \end{cases}$$

براساس شکل، مختصات رأس سهمی $(\frac{۱}{۲}, ۲)$ و صفرهای آن $x = ۱, x = ۰$ است.

$$g(g) = ax(x-۱) \rightarrow ۲ = a(\frac{۱}{۲})(\frac{۱}{۲}-۱) \rightarrow a = -۸ \rightarrow g(x) = -۸x(x-۱)$$

مقدار تابع g در $x = ۳$ را می‌یابیم:

$$g(۳) = -۴(۳)(۳-۱) = -۴۸$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۷۹ گزینه ۳ درست است.

تابع فاصلهٔ دو تابع در x برابر است با:

$$g_{(x)} = |(۲\cos ۴x - ۱) - \sin ۲x| = |۲(۱ - ۲\sin^۲ ۲x) - ۱ - \sin ۲x| = |-۴\sin^۲ ۲x - \sin ۲x + ۱|$$

برای یافتن حداکثر مقدار این تابع به‌جای $۲x$ در تابع $y = -۴\sin^۲ ۲x - \sin ۲x + ۱$ مقادیر -۱ و ۱ و $-\frac{b}{۲a} = -\frac{-۱}{۲(-۴)} = \frac{-۱}{۸}$ جایگذاری می‌کنیم.

$$\sin ۲x = -۱ \rightarrow y = -۴ + ۱ + ۱ = -۲$$

$$\sin ۲x = ۱ \rightarrow y = -۴ - ۱ + ۱ = -۴$$

$$\sin ۲x = \frac{-۱}{۸} \rightarrow y = -۴(-\frac{۱}{۸})^۲ - (-\frac{۱}{۸}) + ۱ = -\frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۸} + ۱ = \frac{۱۷}{۱۶}$$

درنتیجه $-۴ \le y \le \frac{۱۷}{۱۶}$ و $۰ \le |y| \le ۴$، بنابراین حداکثر فاصله به ۴ واحد می‌رسد. یعنی $L = ۴$ و $\sin ۲x_A = ۱$

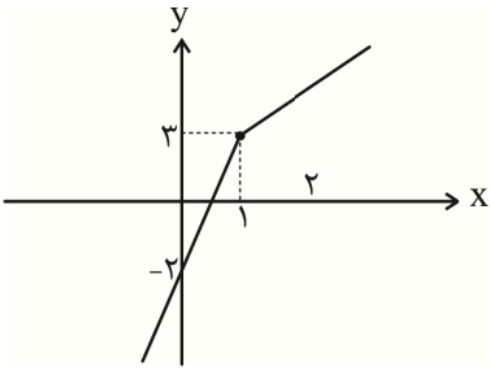
بنابراین:

$$۲x_A = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \rightarrow x_A = k\pi + \frac{\pi}{۴} \rightarrow \cos x_A = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \text{ یا } -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

پاسخ تست $\frac{\cos x_A}{L} = \frac{\frac{\pm\sqrt{۲}}{۲}}{۴} = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۸}$ است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۸۰ نمودار $f(x)=۳x-|۲x-۲|$ را ببینید. تابع f اکیداً صعودی است.



حالا برای اینکه gof اکیداً نزولی شود باید g نزولی باشد. دقت کنید که $\log x$ بر $\mathbb{R}$ تعریف نمی‌شود. $|۲^x-۱|$ در $x=۰$ تغییر آهنگ می‌دهد.

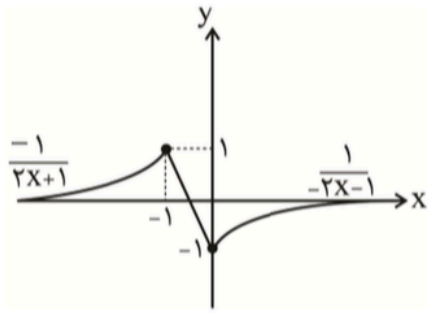
$|x-۱|+۲x$ اکیداً صعودی است، اما $g(x)=\left(\frac{\sqrt{۵}}{۳}\right)^x$ اکیداً نزولی است.

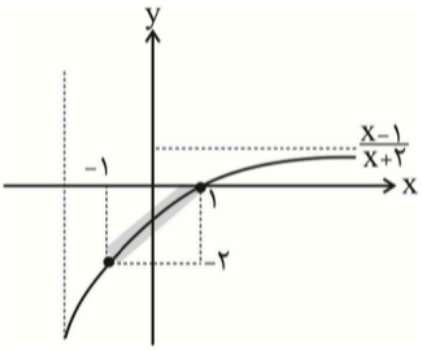
(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۸۱ ابتدا نمودار $g(x)=\frac{|x|-|x+۱|}{|x|+|x+۱|}$ را با بازه‌بندی رسم می‌کنیم:

$$g(x)=\begin{cases}\frac{-x+(x+۱)}{-x-(x+۱)} & , x<-۱\\ \frac{-x-(x+۱)}{-x+(x+۱)} & , -۱\le x<۰\\ \frac{x-(x+۱)}{x+(x+۱)} & , x\ge ۰\end{cases}=\begin{cases}\frac{۱}{-۲x-۱} & , x<-۱ \quad \text{یا} \quad x\ge ۰\\ -۲x-۱ & , -۱\le x<۰\end{cases}$$

نمودار g را ببینید





پس برد g در فاصله $[-۱,۱]$ است و باید فقط قسمتی از نمودار f که در فاصله -۱ تا ۱ است را ببینیم:

$$-۱\le g(x)\le ۱$$

$$\xrightarrow{f \text{ صعودی است}} f(-۱)\le f\big(g(x)\big)\le f(۱)\Rightarrow -۲\le fog\le ۰$$

یعنی برد fog فاصله $[-۲,۰]$ است که ۳ عدد صحیح دارد و جمع آن‌ها می‌شود.

$$(-۲)+(-۱)+۰=-۳$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۸۲ $f(x)$ ترکیب دو تابع ۳^x و $\frac{۳x-۱}{x+۲}$ است.

$$x \longrightarrow \boxed{۳^x} \longrightarrow \boxed{\frac{۳x-۱}{x+۲}} \longrightarrow y$$

پس برای $f^{-۱}(x)$ داریم:

$$x \longleftarrow \boxed{\log_{۳}^{x}} \longleftarrow \boxed{\frac{-۲x-۱}{x-۳}} \longleftarrow y$$

یعنی: $f^{-۱}(x)=\log_{۳}^{\frac{-۲x-۱}{x-۳}}$

و داریم: $g(x)=\frac{-۲x-۱}{x-۳}$

$$g(۰)=\frac{۱}{۳} \Rightarrow [g(۰)]=۰ \Rightarrow g([g(۰)])=g(۰)=\frac{۱}{۳}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۸۳ برای پیدا کردن $f(۲)$، ورودی تابع f (یعنی خروجی تابع $g(۲x)$) باید برابر ۲ باشد، پس داریم:

$$g(۲x)=۴x-۱=۲ \Rightarrow x=\frac{۳}{۴}$$

همچنین ورودی دومین تابع g، $f(۲)$ و خروجی آن ۹ است، پس داریم: $g(f(۲))=۲f(۲)-۱=۲(۵)-۱=۹$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۸۴ می‌دانیم که $fof^{-۱}(۳x)=۳x$ است، اما باید:

$$۳x \in D_{f^{-۱}} \Rightarrow ۳x \in R_f$$

با توجه به نمودار داده‌شده: $R_f=R_{f(۲x-۱)}=(-\infty,-۱]\cup(۳,+\infty)$

پس:

$$۳x \in (-\infty,-۱]\cup(۳,+\infty) \Rightarrow x \in \left(-\infty,\frac{-۱}{۳}\right]\cup(۱,+\infty)$$

این محدودهٔ x در گزینه ۴ آمده است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

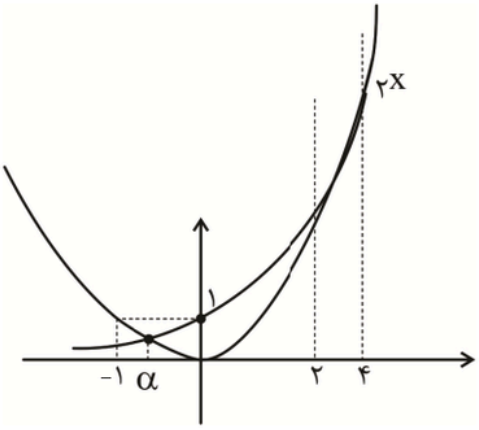
۳۸۵ از آنجا که $\log_{۲}^{۳}=\frac{۱}{\log_{۳}^{۲}}$ است. پس داریم:

$$(\log_{۳}^{۲})^{۲^x}<(\log_{۳}^{۲})^{x^۲}$$

چون پایه نامساوی نمایی، عدد $\log_{۳}^{۲}$ است که عددی بین صفر و یک می‌باشد، پس جهت نامساوی عوض شده و داریم:

$$۲^x>x^۲$$

برای حل این نامعادله، از رسم نمودارهای توابع $y=۲^x$ و $y=x^۲$ در یک دستگاه مختصات استفاده می‌کنیم:



همان‌طور که می‌بینید، نمودار $y=۲^x$، در بازهٔ $(\alpha,۲)$ و $(۴,+\infty)$ بالاتر از نمودار $y=x^۲$، قرار دارد، پس مجموعه جواب این نامعادله، شامل سه عدد صحیح $x=۰,۱,۵$ در بازهٔ $[-۵,۵]$ است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۸۶ تابع داده‌شده را به‌صورت مکعب دو جمله‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\underbrace{(۲۷x^۳-۲۷x^۲+۹x-۱)}_{(۳x-۱)^۳}-۸=(۳x-۱)^۳-۸=y$$

$$\Rightarrow(۳x-۱)=\sqrt[۳]{y+۸}\Rightarrow x=\frac{\sqrt[۳]{y+۸}+۱}{۳}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{\sqrt[۳]{x+۸}+۱}{۳}\Rightarrow\begin{cases}a=۱\\b=۸\\c=۳\end{cases}$$

$$\Rightarrow a+b-c=۱+۸-۳=۶$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۸۷ برای اینکه تابع f در بازه داده‌شده اکیداً نزولی باشد، دو حالت داریم:

۱) نمودار تابع f یک سهمی رو به بالا بوده و طول رأس این سهمی، بزرگ‌تر مساوی ۵ باشد:

$$\begin{cases} k-۲>۰\Rightarrow k>۲ \\ -\frac{(-k)}{۲k-۴}\geq ۵\Rightarrow \frac{k-۱۰k+۲۰}{۲k-۴}\geq ۰\Rightarrow \frac{-۹k+۲۰}{۲k-۴}\geq ۰\Rightarrow ۲<k\leq \frac{۲۰}{۹} \end{cases}$$

۲) تابع f یک تابع خطی با شیب منفی باشد:

$$\begin{cases} k-۲=۰\Rightarrow k=۲ \\ -k<۰\Rightarrow -۲<۰ \quad \text{ق ق} \end{cases}$$

بنابراین: $۲\leq k\leq \frac{۲۰}{۹}$ و در این بازه شامل یک عدد صحیح می‌باشد.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۸۸ اعضای f عبارت‌اند از:

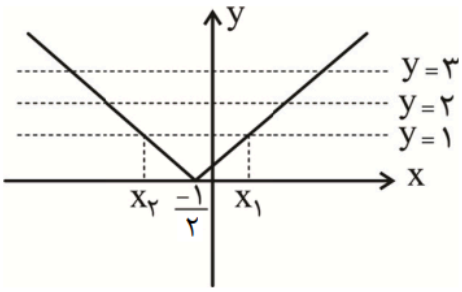
$$|x|+|y|=۲$$
$$(x,y)=(۲,۰),(-۲,۰),(۰,۲),(۰,-۲),(۱,۱),(۱,-۱),(-۱,۱),(-۱,-۱)$$

با مؤلفهٔ اول ۲ و ۲- فقط یک زوج مرتب داریم.

با مؤلفهٔ اول ۰ و ۱ و ۱- هر کدام ۲ زوج مرتب داریم که باید یکی حذف شود. پس حذف حداقل ۳ عضو لازم است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۸۹



تابع هر یک از مقادیر ۱ و ۲ و ۳ را دو بار می‌گیرد. پس مثلاً برای وجود ۱ در برد وجود $x_۱$ یا $x_۲$ یا هر دو در دامنه لازم است.

۳ حالت $\Rightarrow$ هر دو یا $x_۲$ یا $x_۱$

پس $۳\times۳\times۳$ حالت برای دامنه داریم. یعنی A دارای ۲۷ حالت است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۹۰ باید دامنه تابع $f(x)=\sqrt{ax^۲+۸x+c}+d$ به‌صورت $\{۲\}$ باشد، پس حتماً زیر رادیکال $(x-۲)^۲$ با ضریب منفی داریم:

$$ax^۲+۸x+c=k(x^۲-۴x+۴)\Rightarrow k=-۲\Rightarrow a=-۲,c=-۸$$

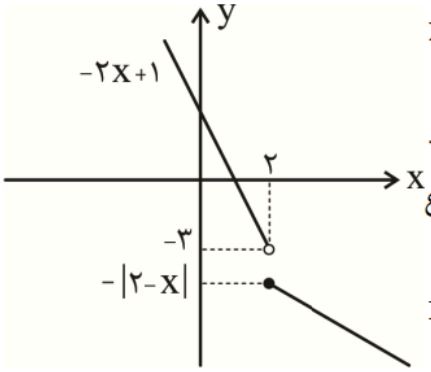
پس $f(x)=\sqrt{-۲(x-۲)^۲}+d$ و باید $f(۲)=g(۲)=۱$ باشد، پس $d=۱$ و داریم: $d=۱$

و بنابراین:

$$d-c-a=۱۱$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۹۱ باید ضابطه‌ها در دامنه خود ۱ به ۱ باشند، یعنی نقطهٔ ماکزیمم قدرمطلق در $x \geq ۲$ قرار ندارد:



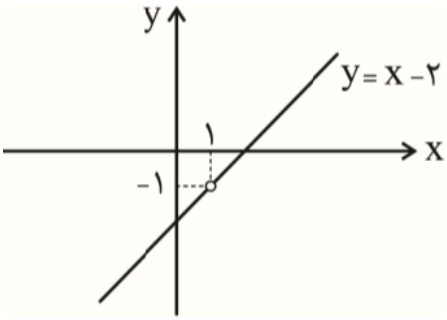
$$\rightarrow m < ۲$$

و اشتراک بردها تهی باشد، یعنی عرض ماکزیمم ضابطه پایین (در $x = ۲$) از شروع ضابطه بالا (در نقطهٔ توخالی $(۲,-۳)$) بیشتر نباشد:

$$f(۲) = -|۲-m| \leq -۳ \rightarrow ۲-m \geq ۳ \rightarrow m \leq -۱$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۹۲ ضابطه را ساده کنیم:



$$y = \frac{x^۲-۳x+۲}{x-۱} = \frac{(x-۱)(x-۲)}{x-۱} = x-۲\ ,\ x \neq ۱$$

پس برد تابع به‌صورت $\mathbb{R}-\{-۱\}$ است.

ضابطه وارون $y = x-۲$ به‌صورت $y = x+۲$ است و دامنهٔ آن $x \neq -۱$ خواهد بود. پس می‌نویسیم:

$$f^{-۱}(x) = \frac{(x+۲)(x+۱)}{(x+۱)} = \frac{x^۲+۳x+۲}{x+۱}$$

و در مقایسه با صورت سؤال داریم:

$$a+b+c = ۶$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۹۳ برای اینکه این تابع، یک تابع خطی باشد، باید پیوسته بوده و شیب در تمام قسمت‌ها با هم برابر باشد.

$$y = \begin{cases} (a+۱)x-۱ & x \geq ۱ \\ bx+b & ۰ \leq x < ۱ \\ cx+d & x < ۰ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x=۱} a+۱-۱ = b+b \rightarrow a = ۲b\ (۱)$$

$$\xrightarrow{x=۰} b = d\ (۲)$$

$$\begin{cases} a+۱ = b \rightarrow b = -۱ \rightarrow a = -۲ \\ b = c \rightarrow c = -۱ \rightarrow d = -۱ \end{cases}$$

پس الف و ب و ج هر سه درست است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۹۴ چون دامنهٔ جذر تابع درجه ۳ نمی‌تواند محدود به یک بازه دو سر بسته باشد، پس این تابع باید تبدیل به تابع درجهٔ دو شود که ریشه‌های آن ۱- و ۲ است، پس $a=0$ و لذا:

$$f(x)=\sqrt{bx^2+cx+4}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها}=S\rightarrow S=1=-\frac{c}{b}\rightarrow c=2$$

$$\text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}=p\rightarrow p=\frac{4}{b}=-2\rightarrow b=-2$$

چون تابع $g(x)$ خطی است، پس $d=0$ است.

حال چون از ناحیهٔ دوم مختصات عبور نمی‌کند، داریم:

$$g(x)=4x+e+2$$

باید عرض از مبدأ آن نامثبت باشد، پس:

$$e+2\le 0\rightarrow e\le -2$$

پس $\max(e)=-2$ و لذا:

$$\max(a+b+c+d+e)=0+(-2)+2+0+(-2)=-2$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۹۵

$$x_{A'}=2(2)-1=3$$

$$y_{A'}=\frac{3-1}{2}=1 \quad \rightarrow x_{A'}+y_{A'}=4$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۹۶ با انتقال ۲ واحد به‌راست، شیب f تغییر نمی‌کند پس:

$$m_{f^{-1}}=m_f\Rightarrow\frac{1}{a}=a\Rightarrow a=\pm 1$$

پس $f(x)=x+b$ یا $f(x)=-x+b$

تابع خطی با شیب ۱- با وارونش برابر است که با صورت سؤال تناقض دارد؛ بنابراین فقط $f(x)=x+b$ و داریم:

$$f^{-1}(x)=x-b$$

$$f(x)=x+b\xrightarrow{\text{دو واحد به راست}}f(x)=x+b-2\xrightarrow{\text{بر وارون منطبق است}}f^{-1}(x)=x+b-2$$

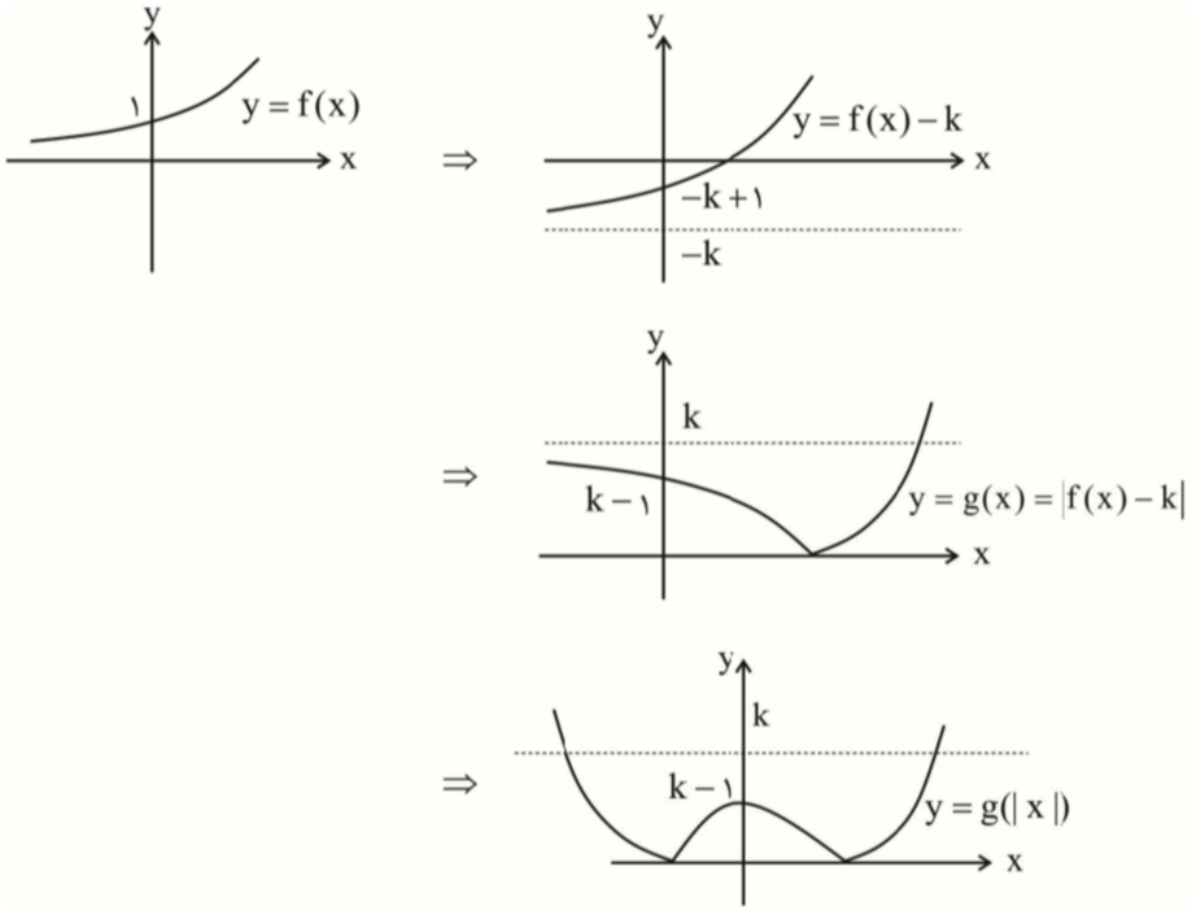
$$x-b=x+b-2\Rightarrow b=1$$

پس باید:

پس $f^{-1}(x)=x-1$ و $f^{-1}(4)=3$ است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۹۷ نمودار توابع $g(x)$ و سپس $g(|x|)$ را رسم کرده و سپس تعداد تلاقی‌های آن با تابع ثابت $y=k$ را به‌دست می‌آوریم:



واضح است که خط $y=k$، نمودار تابع را در دو نقطه متمایز قطع می‌کند و معادله دو ریشه دارد.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۹۸ می‌دانیم که تابع $y=\frac{-x+3}{x+2}$ در $x\geq 0$، نزولی أکید است. پس $y=ax-b$ هم باید نزولی اکید باشد $(a<0)$ و ضمناً

$$f(\overset{-}{0})\geq f(\overset{+}{0})\Rightarrow -b\geq \frac{3}{2}\Rightarrow b\leq \frac{-3}{2}$$

پس بیشترین مقادیر صحیح ممکن برای a و b عبارت‌اند از: $a=-1$ و $b=-2$ و تابع $f(x)$ به‌صورت زیر می‌شود:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{-x+3}{x+2} & x\geq 0\\ -x+2 & x<0\end{cases}$$

برای محاسبهٔ $f^{-1}(4)$، تابع $f(x)$ را برابر با ۴ قرار می‌دهیم که از ضابطهٔ بالا، ریشه‌ای به‌دست نمی‌آید. اما از ضابطهٔ پایین به $x=-2$ می‌رسیم. پس:

$$f^{-1}(-f^{-1}(4))=f^{-1}\big(-(-2)\big)=f^{-1}(2)$$

نهایتاً برای محاسبهٔ $f^{-1}(2)$، ضابطهٔ تابع $f(x)$ را برابر با ۲ می‌گذاریم:

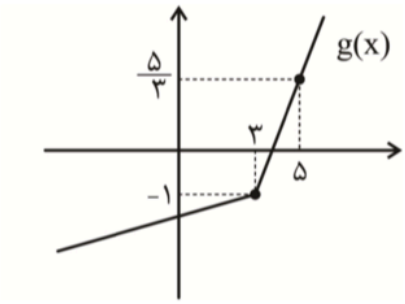
$$\begin{cases}\text{ضابطه بالا}: \frac{-x+3}{x+2}=2\Rightarrow -x+3=2x+4\Rightarrow x=\frac{-1}{3} & \text{غ ق ق}\\ \text{ضابطه پایین}: -x+2=2\Rightarrow x=0 & \text{غ ق ق}\end{cases}\quad\rightarrow \text{جواب ندارد}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۹۹ گزینه ۲ درست است.

برای تعیین دامنهٔ تابع y داریم:

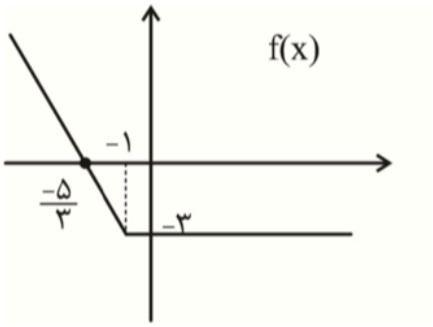
$$۳ - gof(x) \geq ۰ \Rightarrow gof(x) \leq ۳ \Rightarrow g(f(x) \leq ۳$$



برای آن‌که $g(O) \leq ۳$ برقرار باشد، باتوجه به نمودار تابع g کافی است معادلهٔ خط گذرنده از نقاط $(۳,-۱)$ و $(۵,\frac{۵}{۳})$ را بنویسیم و آن را کوچک‌تر یا مساوی ۳ قرار دهیم:

$$y = \frac{۴}{۳}x - ۵ \leq ۳ \Rightarrow \frac{۴}{۳}x \leq ۸ \Rightarrow x \leq ۶$$

پس $g(f(x) \leq ۳$ وقتی درست است که $f(x) \leq ۶$ باشد.



برای آن‌که $f(x) \leq ۶$ باشد، با توجه به نمودار تابع f، کافی است معادلهٔ خط گذرنده از نقاط $(-۱,-۳)$ و $(\frac{-۵}{۳},۰)$ را بنویسیم و آن را کوچک‌تر یا مساوی ۶ قرار دهیم.

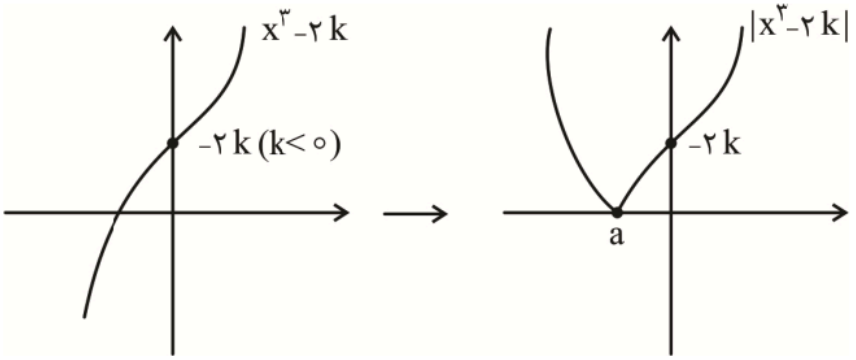
$$y = \frac{-۹}{۲}x - \frac{۱۵}{۲} \leq ۶ \Rightarrow \frac{-۹}{۲}x \leq \frac{۲۷}{۲} \Rightarrow x \geq -۳$$

پس نهایتاً دامنهٔ تابع y به‌صورت $[-۳,+\infty)$ است و شامل سه عدد صحیح منفی می‌باشد.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۰۰ گزینه ۳ درست است.

به نمودار تابع $f(x)=|۲k-x^۳|=|x^۳-۲k|$ که $k<۰$ است، توجه کنید:



تابع در بازهٔ $(a,+\infty)$ اکیداً صعودی است. برای پیدا کردن a داریم:

$$f(x)=۰\Rightarrow x^۳-۲k=۰\Rightarrow x=\sqrt[۳]{۲k}$$

پس تابع در بازهٔ $(\sqrt[۳]{۲k},+\infty)$ اکیداً صعودی است و از مقایسهٔ آن با بازهٔ $(k,+\infty)$ در صورت سؤال داریم:

$$\sqrt[۳]{۲k}=k\Rightarrow ۲k=k^۳\Rightarrow k^۳-۲k=۰\Rightarrow k(k^۲-۲)=۰\Rightarrow k=۰,k=\pm\sqrt{۲}$$

چون $k<۰$ است، $k=-\sqrt{۲}$ قابل قبول است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۰۱ گزینه ۳ درست است.

ابتدا $f(\sqrt{۳})$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=x^۲+[x]\rightarrow f(\sqrt{۳})=(\sqrt{۳})^۲+[\sqrt{۳}]=۳+۱=۴$$

پس:

$$f\left(\underbrace{af(\sqrt{۳})}_{۴}\right)=۲\rightarrow f(۴a)=۲$$

با جایگذاری گزینه‌ها به جای a، فقط گزینهٔ ۳ یعنی $a=\frac{-۱}{۲}$ در تساوی اخیر صدق می‌کند:

$$f(۴a)\xrightarrow{a=\frac{-۱}{۲}}f(-۲)=(-۲)^۲+[-۲]=۴-۲=۲$$

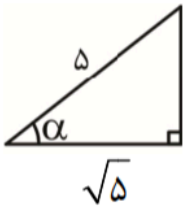
(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۰۲ گزینه ۱ درست است.

با استفاده از فرض سؤال داریم:

$$\sin(\frac{۵\pi}{۲}+\alpha)=\frac{\sqrt{۵}}{۵} \xrightarrow{\text{حذف } ۲\pi} \sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\frac{\sqrt{۵}}{۵} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه فرضی داریم:



فیثاغورس: $۲\sqrt{۵} \rightarrow \sin\alpha=\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$

می‌دانیم که شیب هر خط برابر با تانژانت زاویه‌ای است که آن خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد. پس:

$$m_{f^{-۱}}=\tan ۲\alpha=\frac{\sin ۲\alpha}{\cos ۲\alpha}=\frac{۲\sin\alpha\cos\alpha}{۲\cos^{۲}\alpha-۱}=\frac{۲(\frac{۲\sqrt{۵}}{۵})(\frac{\sqrt{۵}}{۵})}{۲(\frac{\sqrt{۵}}{۵})^{۲}-۱}=\frac{\frac{۴}{۵}}{\frac{-۳}{۵}}=\frac{-۴}{۳}$$

می‌دانیم دو تابع خطی که وارون هم هستند، شیب‌های برعکس هم دارند، پس $m_f=\frac{-۳}{۴}$ نهایتاً داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|f(x)|}{f^{-۱}(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|\frac{-۳}{۴}x+h|}{\frac{-۴}{۳}x+h'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{-۳}{۴}x+h}{\frac{-۴}{۳}x+h'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{-۳}{۴}x}{\frac{-۴}{۳}x}=\frac{۹}{۱۶}$$

دقت کنید که در محاسبهٔ $\lim_{x\to-\infty}|\frac{-۳}{۴}x+h|$، داخل قدرمطلق مثبت است و خود عبارت از قدرمطلق، بیرون آمده است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۰۳ گزینه ۱ درست است.

ابتدا تابع f^{-1} را کمی ساده می‌کنیم تا وارون آن یعنی تابع f را راحت‌تر به‌دست آوریم:

$$f^{-1}(x)=x^3-6x^2+12x-7=(x-2)^3+1\xrightarrow{\text{وارون}}f(x)=\sqrt[3]{x-1}+2$$

پس حد موردنظر به‌صورت زیر است:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{\left((x-2)^3+1\right)-3(\sqrt[3]{x-1}+2)+8}{|x^2+x+[\frac{-5}{2}x]|}$$

ابتدا تکلیف براکت را روشن می‌کنیم:

$$\left[\frac{-5}{2}(2^+)\right]=[-5(1^+)]=[(-5^-)]=-6$$

حالا تکلیف قدرمطلق را معلوم می‌کنیم:

$$|x^2+x-6|=|(x-2)(x+3)|\xrightarrow{x=2^+}=(x-2)(x+3)=x^2+x-6$$

پس با حد زیر مواجه‌ایم:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)^3-3\sqrt[3]{x-1}+3}{x^2+x-6}=\frac{0}{0}$$

از طریق حذف عامل صفرشوندهٔ $(x-2)$ یا از روش هوپیتال عمل می‌کنیم:

$$\text{هوپیتال}:\ \lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)^2-3(\frac{1}{3})(x-1)^{\frac{-2}{3}}}{2x+1}=\frac{-1}{5}$$

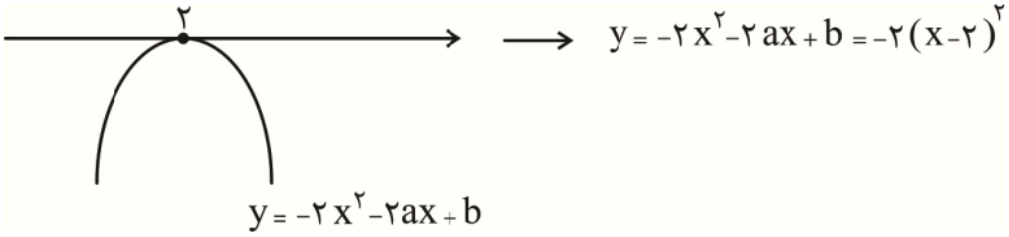
(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۰۴ گزینه ۱ درست است.

شرط اول تساوی توابع، برابری دامنه‌هاست:

$$D_f:\begin{cases}۲-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۲\\ \frac{x-۲}{۴-x}\geq ۰\Rightarrow ۲\leq x<۴\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}D_f=\{۲\}$$

پس باید دامنهٔ g نیز فقط شامل تک عضو $x=۲$ باشد، یعنی عبارت درجهٔ دوم $y=-۲x^۲-۲ax+b$ فقط به ازای $x=۲$، بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد. برای این منظور لازم است:



$$\Rightarrow -۲x^۲-۲ax+b=-۲x^۲+۸x-۸\rightarrow\begin{cases}a=-۴\\ b=-۸\end{cases}$$

شرط دوم، برابری خروجی‌ها به‌ازای دامنهٔ مشترک (در اینجا $x=۲$) است:

$$\begin{cases}f(۲)=۰\\ g(۲)=c\end{cases}\rightarrow c=۰\Rightarrow a+b+c=(-۴)+(-۸)+(۰)=-۱۲$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۰۵ گزینه ۳ درست است.

تابع $f(x)$ را به‌صورت:

$$f(x)=x^۳+۳x^۲+۳x+۱-۱+a$$

$$f(x)=(x+۱)^۳+a-۱\quad,\quad (f+f^{-۱})(-۱)=f(-۱)+f^{-۱}(-۱)$$

$$\begin{cases}f(-۱)=a-۱\\ f^{-۱}(-۱)\Rightarrow \cancel{-۱}=(x+۱)^۳+a-\cancel{a}\rightarrow (x+۱)^۳=-a\end{cases}\qquad x+۱=\sqrt[۳]{-a}\qquad x=\sqrt[۳]{-a}-۱$$

$$f(-۱)+f^{-۱}(-۱)=۲$$

$$\downarrow\qquad\qquad\downarrow$$

$$a-\cancel{a}+\sqrt[۳]{-a}-\cancel{a}=-\cancel{a}$$

$$a+\sqrt[۳]{-a}=۰\rightarrow\sqrt[۳]{-a}=-a\xrightarrow{\text{توان}}۳$$

$$\cancel{a}=\cancel{a}^۳\rightarrow a-a^۳=۰\rightarrow a(۱-a^۲)=۰\rightarrow a=۰\ \text{یا}\ ۱\ \text{یا}\ -۱$$

مجموع مقادیر $=۰+۱+(-۱)=$ صفر

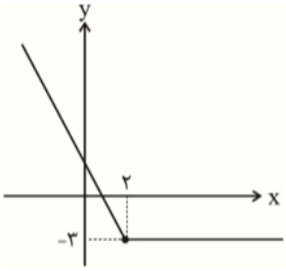
(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۰۶ گزینه ۱ درست است.

با دقت به اینکه $\sqrt{A^۲}=|A|$ ضابطه f به‌صورت زیر در می‌آید:

$$f(x)=|x-۲|-(x+۱)$$

که برای $x>۲$ و $x<۲$ در دو حالت قدرمطلق را بر می‌داریم. $f(x)\begin{cases}-۳, x\geq ۲\\ -۲x+۱, x<۲\end{cases}$ و نمودار آن به‌صورت روبه رو است:



پس f در بازه $(-\infty,۲]$ و هر زیرمجموعهٔ آن اکیداً نزولی است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۰۷ گزینه ۳ درست است.

اگر تابعی به فرم $y=\frac{ax^n bx^{n-۱}+\dots}{a'x^n+b'x^{n-۱}+\dots}$ تابع ثابت $y=k$ باشد آنگاه $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\dots=\underset{\text{ضابطه تابع}}{\underbrace{k}}$ می‌باشد بنابراین:

$$\frac{a+۲}{a}=\frac{۳}{۱}=\frac{۲c-۱}{۴}\rightarrow\begin{cases}\frac{a+۲}{a}=\frac{۳}{۱}\rightarrow a=۱\\ \frac{۲c-۱}{۴}=\frac{۳}{۱}\rightarrow c=\frac{۱۳}{۲}\end{cases}$$

حاصل $\frac{-۲a}{-۳a+۲c}=\frac{-۲}{۱۰}$ می‌باشد.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۰۸ گزینه ۲ درست است.

ابتدا حد تابع $f(x)$ را در $+\infty$ محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x^۲+۳x+۱}{x^۲-۵x+۶}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲(x^۲-۵x+۶)+۱۳x-۱۱}{x^۲-۵x+۶}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}۲+\frac{۱۳x-۱۱}{x^۲-۵x+۶}=۲+۰^+=۲^+$$

کافی است برای محاسبهٔ مقدار حد تابع $y=fof(x)$ در $+\infty$، حد راست تابع $f(x)$ را در $x=۲$ محاسبه کنیم.

$$\lim_{x\to+\infty}fof(x)=\lim_{x\to۲^+}f(x)=\lim_{x\to۲^+}\frac{۲x^۲+۳x+۱}{(x-۲)(x-۳)}=\frac{۱۵}{۰^+\times-۱}=\frac{۱۵}{۰^-}=-\infty$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۰۹ گزینه ۱ درست است.

شرط تساوی ضابطه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$\sqrt{ax^۲+۴ax}=\sqrt{(a^۲-۲)x^۲+bx}\rightarrow\begin{cases}a=a^۲-۲\rightarrow a^۲-a-۲=۰\rightarrow\begin{cases}a=-۱\\a=۲\end{cases}\\b=۴a\end{cases}$$

به‌ازای $a=۲$ و $b=۸$ دامنهٔ تابع $f(x)$ به‌صورت $(-\infty,-۴]\cup[۰,+\infty)$ و دامنهٔ تابع g به‌صورت $[۰,+\infty)$ در می‌آید که درنهایت دو تابع مساوی نیستند.

به‌ازای $a=-۱$ و $b=-۴$ دامنهٔ تابع‌های f و g هر دو $[-۴,۰]$ هستند و دو تابع برابرند؛ پس: $a+b=-۵$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)